

Некоторые вопросы кварковых конденсатов

С.В. Молодцов

ОИЯИ, ИТЭФ

Сессия ЯО РАН 5—8.11.2013

- Четырехфермионное взаимодействие
- Термодинамика кваркового ансамбля
- Ферми жидкость
 - Поверхность раздела газа и жидкости
 - Капли кварковой жидкости
- Цветовая сверхпроводимость
- Фермионный конденсат
- Константа взаимодействия

Четырехфермионное взаимодействие

$$\mathcal{H} = -\bar{q} (i\gamma\nabla + im) q - \bar{q} t^a \gamma_\mu q \int d\mathbf{y} \bar{q}' t^b \gamma_\nu q' \langle A_\mu^a A_\nu'^b \rangle$$
$$\langle A_\mu^a A_\nu'^b \rangle = G \delta^{ab} [\delta_{\mu\nu} F(\mathbf{x} - \mathbf{y})]$$

$$F(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \text{ (НИЛ), } F(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}) \text{ (ККБ), } F(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|$$

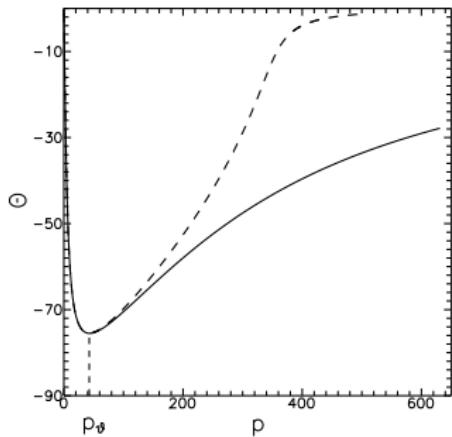
$$q(\mathbf{x}) = \int \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{(2E_p)^{1/2}} [a_{\mathbf{p},s} u_{\mathbf{p},s} e^{i\mathbf{px}} + b_{\mathbf{p},s}^+ v_{\mathbf{p},s} e^{-i\mathbf{px}}]$$

$$E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}, \quad a |0\rangle = 0, \quad b |0\rangle = 0, \quad d\tilde{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/(2\pi)^3$$

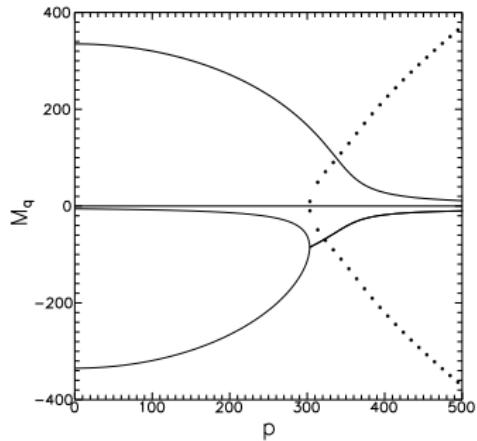
Преобразование Боголюбова $T = \prod_{p,s} \exp [\varphi_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p},s}^+ b_{-\mathbf{p},s}^+ + a_{\mathbf{p},s} b_{-\mathbf{p},s})]$

$$A = T a T^\dagger, \quad |\sigma\rangle = T|0\rangle, \quad E = \min_{\varphi_{\mathbf{p}}} \langle \sigma | H | \sigma \rangle$$

Четырехфермионное взаимодействие



Равновесный угол $\theta = 2\varphi$ как функция импульса p в МэВ. Сплошная линия описывает модель НИЛ, штриховая линия соответствует модели ККБ.



Три ветви решений для динамической массы кварка в МэВ для модели ККБ, как функция импульса (МэВ). Точками показаны мнимые части решений.

Термодинамика кваркового ансамбля

$$|N\rangle = \prod_{|P| < P_F, S} A_{P;S}^+ |\sigma\rangle, \quad E = \min_{\varphi_p} \langle N | H | N \rangle \quad (T=0)$$

$$\rho = \langle N | \bar{q} \gamma_0 q | N \rangle = \gamma P_F^3 / 6\pi^2, \quad \gamma = 2N_c N_f$$

$$\mu = [P_F^2 + M_q^2(P_F)]^{1/2}, \quad P = -dE/dV = -\mathcal{E} + \mu \rho$$

$$\xi = \frac{e^{-\hat{H}_{\text{app}}/T}}{Z_0}, \quad Z_0 = \text{Tr} \{ e^{-\hat{H}_{\text{app}}/T} \} \quad (T \neq 0)$$

$$\Omega = E - \mu \bar{Q}_0 - T \bar{S}$$

$$\bar{Q}_0 = \text{Tr}\{\xi Q_0\}, \quad \bar{S} = -\text{Tr}\{\xi S\}, \quad S = -\ln \xi$$

$$P = -dE/dV, \quad d\bar{S}/dV = 0 \rightarrow d\mu/dV, \quad d\bar{Q}_0/dV \neq 0$$

$$\bar{\mu} = \mu, \quad P = -\frac{E}{V} + \frac{\bar{S}T}{V} + \frac{\bar{Q}_0\mu}{V}, \quad \Omega = -P V$$

Функционал Ландау Ферми жидкости

$$\sin(\theta - \theta_m) = \frac{M_q(\mathbf{p})}{P_0}, \quad P_0 = (\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p}))^{1/2}$$

$$\sin \theta_m = \frac{m}{p_0}, \quad p_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$$

$$M_q(\mathbf{p}) = m + \int d\tilde{\mathbf{q}} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \tilde{M}(\mathbf{q})$$

$$w = \frac{E}{V\gamma} = \int d\tilde{\mathbf{p}} p_0 - \int d\tilde{\mathbf{p}} (1 - n - \bar{n}) P_0 + \frac{1}{4G} \int d\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \tilde{M}(\mathbf{p}) \tilde{M}(\mathbf{q})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta w}{\delta \tilde{M}(p)} &\rightarrow M_q = m + 2G \int d\tilde{\mathbf{q}} (1 - n' - \bar{n}') F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \frac{M'_q}{P'_0} \\ \frac{\delta w}{\delta n} = P_0, \quad \frac{\delta^2 w}{\delta n^2} = f_0 \end{aligned}$$

Функционал Ландау Ферми жидкости

- $v_f = \partial P_0 / \partial \mathbf{p}|_{|\mathbf{p}|=P_F}$ групп. ск. квазч. на п.Ф.

$$N_F = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} \delta(P_0 - \mu) = \tilde{N}_F (1 + F_0)^{-1} \quad \text{пл. сост. на п.Ф.}$$

- $\tilde{N}_F = \gamma / (2 \pi^2) P_F P_F^0$ пл. сост. идеального газа

$$F_0 = \tilde{N}_F \quad f_0 = M_q / P_F dM_q / dP_F$$

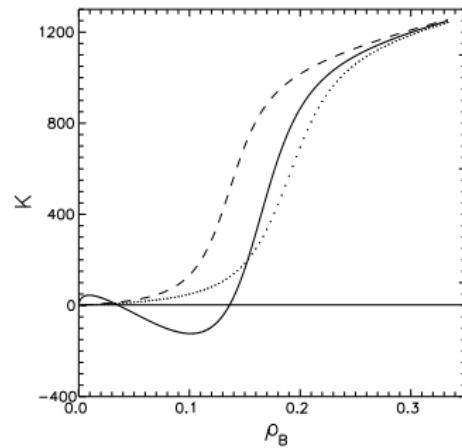
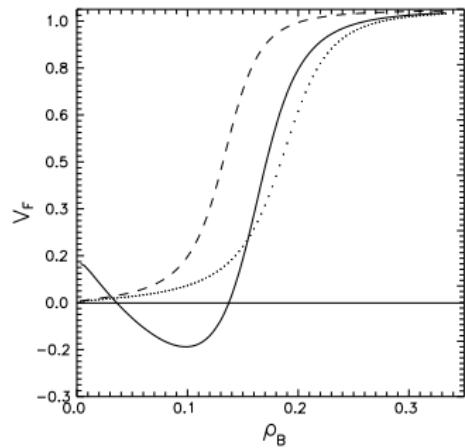
- $K = 9\rho d\mu / d\rho = 3P_F^2 / \mu (1 + F_0)$ модуль сжатия

- $C_1^2 = K / (9\mu) = v_F^2 / 3 (1 + F_0)$ скорость первого звука

- $C_V = \frac{1}{3} \pi^2 N_F T$ теплопроводность

- $N_F C_1^2 = \tilde{N}_F \tilde{C}_1^2$ аналог теоремы Латтинжера

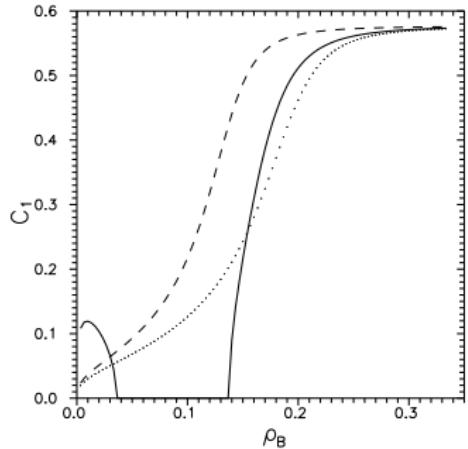
Функционал Ландау Ферми жидкости



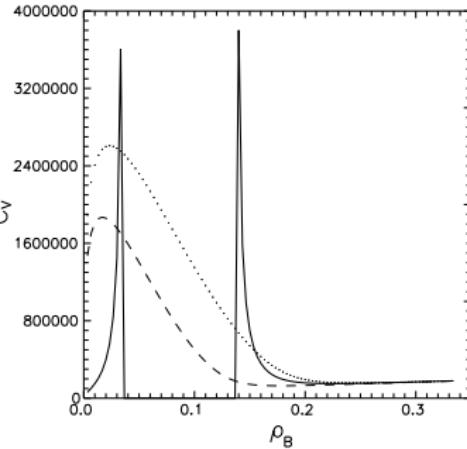
Групповая скорость квазича-
стиц v_F на поверхности Ферми.
Сплошная линия описывает мо-
дель НИЛ, штриховая линия со-
ответствует модели ККБ, точка-
ми обозначены данные для мо-
дели ККБ, с настройкой на мас-
су π -мезона. Аналог. след. рис.

Модуль сжатия K в МэВ.

Функционал Ландау Ферми жидкости

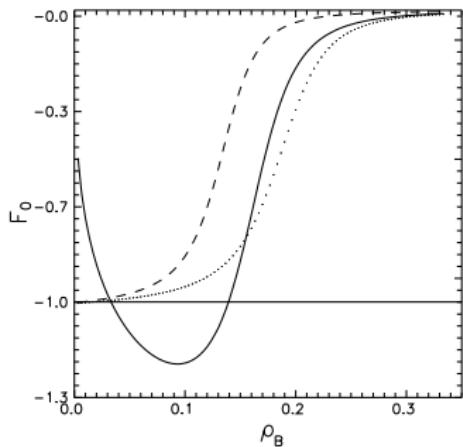


Скорость первого звука C_1 .



Коэффиц. наклона при малых темп.
 $\frac{1}{3}\pi^2 N_F$, $C_V = \frac{1}{3}\pi^2 N_F T$.

Функционал Ландау Ферми жидкости



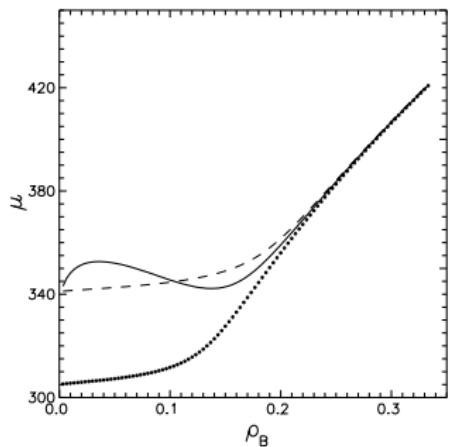
Фактор F_0 теории ферми-жидкости Ландау.

$F_0 > 0$ отталкивание, колебания нулевого звука

$-1 < F_0 < 0$ слабое притяжение, затухающий нулевой звук

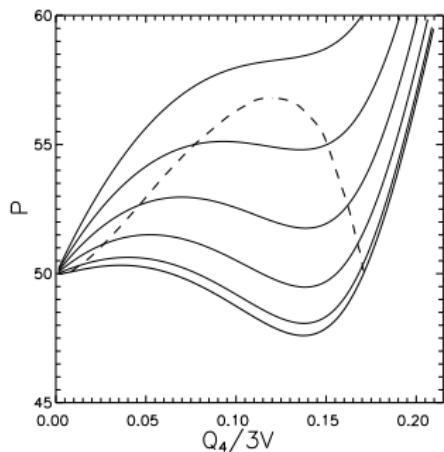
$F_0 < -1$ сильное притяжение, неустойчивость

Термодинамика кваркового ансамбля

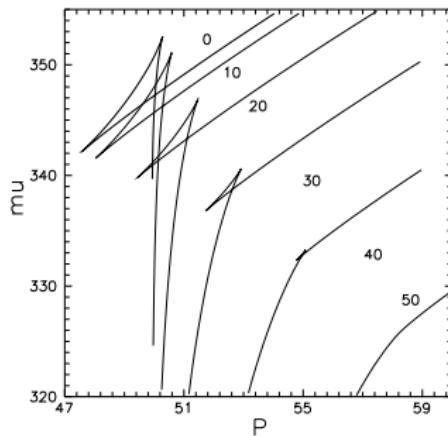


Химический потенциал в МэВ.

Термодинамика кваркового ансамбля



Давление ансамбля P , МэВ/ $\Phi\text{м}^3$, как функция плотности заряда Q_0 при температурах: $T = 0$ МэВ, ..., $T = 50$ МэВ. Самая нижняя кривая — $T = 0$. Штриховой кривой показана граница фазового перехода газ—жидкость.



Фрагменты изотерм. μ , МэВ, как функция давления, P , МэВ/ $\Phi\text{м}^3$. Самая верхняя кривая — нулевая изотерма. Далее вниз с шагом 10 МэВ, до изотермы 50 МэВ (самая нижняя кривая). $T_c \sim 46$ МэВ, $\bar{Q}_0 \sim 0.12$ з/ $\Phi\text{м}^3$. $\rho_l = 3 \times 0.19$ з/ $\Phi\text{м}^3$.

Поверхность раздела газа и жидкости (T=0) $\mathcal{Q}_0 \rightarrow \rho$

$$\rho_g \sim 0, \quad M = 335 \text{ МэВ} \quad \rho_I = 3 \times 0.16 \text{ з/Фм}^3 \quad \overset{*}{M} \approx 70 \text{ МэВ}$$

$$\mathcal{L} = -\bar{q} (\hat{\partial} + M) q - \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - U(\sigma) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m_v^2}{2} V_\mu V_\mu - g_\sigma \bar{q} q \sigma + i g_v \bar{q} \gamma_\mu q V_\mu ,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu , \quad U(\sigma) = m_\sigma^2 \sigma^2 / 2 + b \sigma^3 / 3 + c \sigma^4 / 4 + \dots$$

- Можно ли настроить параметры лагранжиана g_σ , g_v , m_σ , m_v , b , c , и получить аппроксимирующие решения.

Поверхность раздела газа и жидкости (T=0)

$$\Delta \sigma - m_\sigma^2 \sigma = b \sigma^2 + c \sigma^3 + g_\sigma \rho_s ,$$

$$\Delta V - m_v^2 V = -g_v \rho ,$$

$$(\hat{\nabla} + \overset{*}{M}) q = (E - g_v V) q ,$$

$$\overset{*}{M} = M + g_\sigma \sigma, \quad E = \left(\mathbf{p}^2 + \overset{*}{M}^2 \right)^{1/2} ,$$

$$\xi(x) = \int_{\mathbb{P}_F} \widetilde{d\mathbf{p}} q_{\mathbf{p}}(x) \bar{q}_{\mathbf{p}}(x)$$

$$\rho_s(x) = Tr \{ \xi(x), 1 \} , \quad \rho(x) = Tr \{ \xi(x), \gamma_4 \}$$

Приближение Томаса–Ферми, $P_F(x)$:

$$\rho = \gamma \int_{\mathbb{P}_F} \widetilde{d\mathbf{p}} = \gamma P_F^3 / 6\pi^2 , \quad \rho_s = \gamma \int_{\mathbb{P}_F} \widetilde{d\mathbf{p}} \overset{*}{M} / E$$

Поверхность раздела газа и жидкости (T=0)

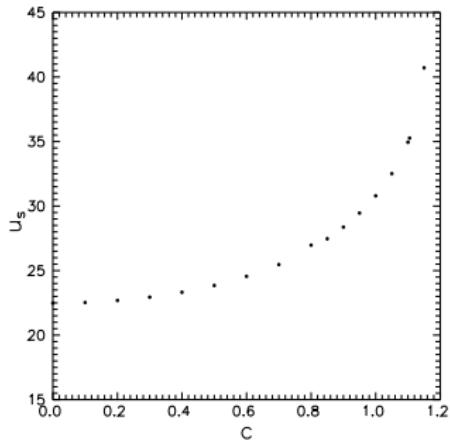
- Интересующие нас настройки и решения существуют, причем параметры аппроксимирующего лагранжиана отвечают сигма модели $b \sim 1.5 m_\sigma^2 g_\sigma/M$, $c \sim 0.5 m_\sigma^2 (g_\sigma/M)^2$.
- Основные характеристики: коэффиц. пов. натяжения,
- толщина пов. слоя t

$$u_s = 4\pi r_o^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[e(x) - \frac{\mathcal{E}_I}{\rho_I} \rho(x) \right]$$

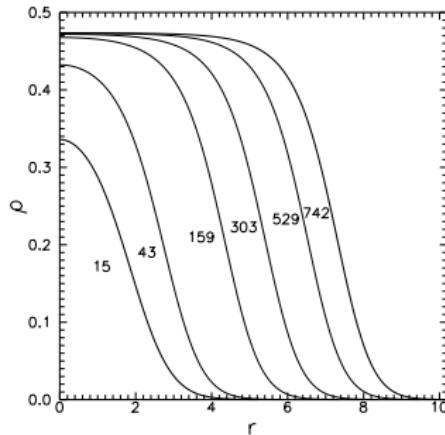
$$e(x) = \mathcal{E}(x)/\rho(x) , \quad \mathcal{E}_I , \quad \rho_I$$

$$\mathcal{E}(x) = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} [\mathbf{p}^2 + M^2(x)]^{1/2} + \frac{1}{2} g_V \rho(x) V(x) - \frac{1}{2} g_\sigma \rho_s(x) \sigma(x)$$

Поверхность раздела, кварковые капли ($T=0$)



Коэффициент пов. нат. u_s
в МэВ. $t \sim 1\text{--}2\text{fm}$.



Распределение плотности кварков ρ
($\text{з}/\text{Фм}^3$) как функция расстояния r (Фм).

Капли кварковой жидкости (T=0)

$$\rho_F(r) = \frac{\tilde{\rho}_0}{1 + e^{(R_0 - r)/b}}, \quad \tilde{\rho}_0, R_0, b, t = 4 \ln(3)b \quad R_0 = r_0 N_q^{1/3}$$

N_q	$\tilde{\rho}_0$ ($\text{з}/\Phi_{\text{М}}^3$)	R_0 ($\Phi_{\text{М}}$)	t ($\Phi_{\text{М}}$)	r_0 ($\Phi_{\text{М}}$)	m_σ (МэВ)	η
15	0.34	1.84	2.24	0.74	351	0.65
43	0.43	2.19	2.28	0.75	384	0.73
159	0.46	4.19	2.29	0.77	409	0.78
303	0.47	5.23	2.29	0.78	417	0.795
529	0.47	6.37	2.27	0.79	423	0.805
742	0.47	7.15	2.27	0.79	426	0.81

N_q	$\tilde{\rho}_0$ ($\text{з}/\Phi_{\text{М}}^3$)	R_0 ($\Phi_{\text{М}}$)	t ($\Phi_{\text{М}}$)	r_0 ($\Phi_{\text{М}}$)	m_σ (МэВ)	η
18	0.81	1.56	1.63	0.57	524	0.7
46	0.9	2.14	1.63	0.6	557	0.75
169	0.93	3.43	1.6	0.62	586	0.79
278	0.94	4.08	1.6	0.62	594	0.8
525	0.94	5.04	1.6	0.62	603	0.81
776	0.94	5.76	1.6	0.63	607	0.815

Плотность ядер

Киральный солитон

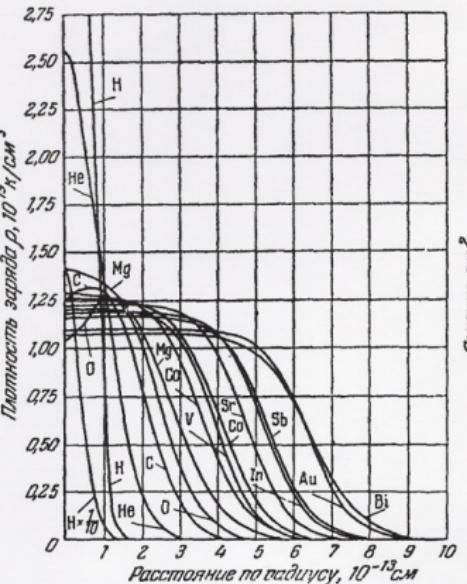


Рис. 6. Сводные аппроксимированные кривые распределения плотности заряда в различных ядрах, изученных с помощью рассеяния электронов.

Плотность заряда в центре ядер — наименее точно определенные участки кривых. Заметьте, кроме того, большое различие между средними и плотностями заряда в центре протона и всех остальных ядер. Алфа-частицы (He^4) — также в особом случае, плотность заряда в ее центре много больше, чем у более тяжелых ядер.

P. Хофстадтер, УФН **63** (1957) 693; W. Broniowski and M. K. Banerjee, Phys. Lett. **B158**, 335 (1978)

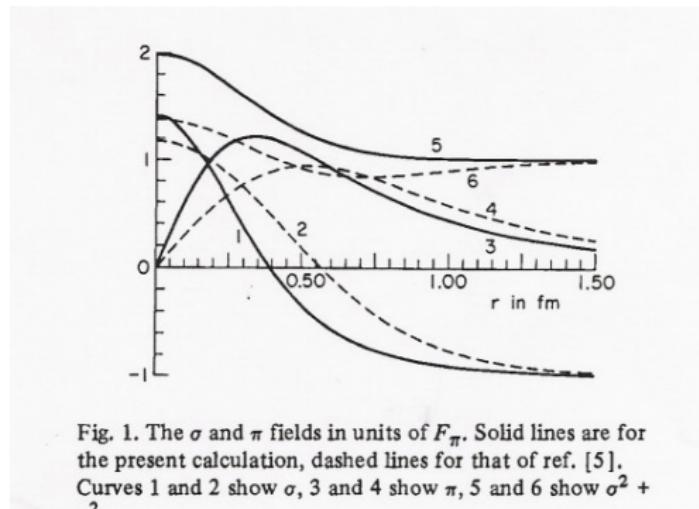
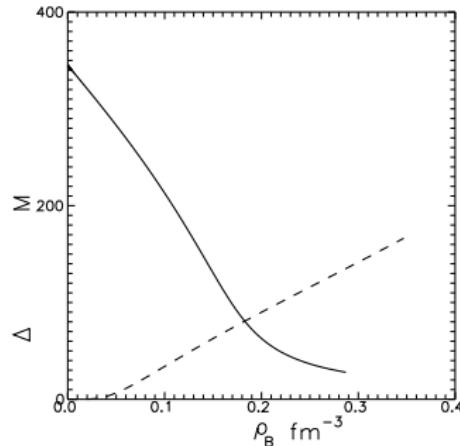
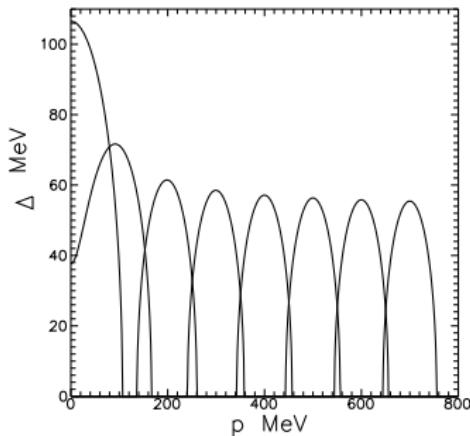


Fig. 1. The σ and π fields in units of F_π . Solid lines are for the present calculation, dashed lines for that of ref. [5]. Curves 1 and 2 show σ , 3 and 4 show π , 5 and 6 show $\sigma^2 + \pi^2$.

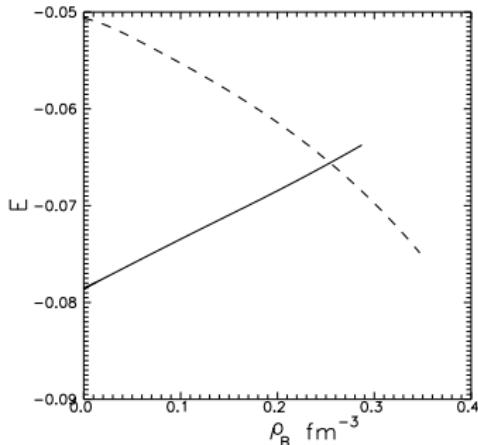
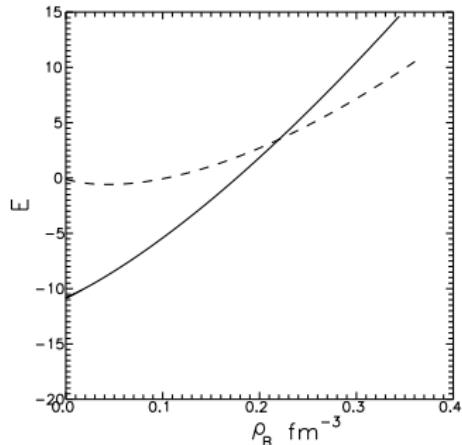
Цветовая сверхпроводимость



Щель как функ. импульса кварка ККБ. $m = 5$ МэВ. Крайняя лев.—норм. усл. Направо—для растущего химического потенциала с шагом 100 МэВ.

Динамическая масса кварка (сплошн. линия) и щель (штрих. линия) как функции барионной плотности в модели NJL.

Цветовая сверхпроводимость



Энергия фазы кирального конденсата и фазы цветовой сверхпроводимости (штрих. кривая) как функции плотности барионного заряда.

Энергия фазы кирального конденсата и фазы цветовой сверхпроводимости (штрих. кривая) как функции плотности барионного заряда для модели NJL.

Фермионный конденсат

Ходель В. А., Шагинян В. Р. Письма ЖЭТФ. 1990. Т. 51 С. 488

$$\Omega = E - \mu \bar{Q}_0 - T \bar{S}$$

$$-(1-n) \frac{M_q}{P_0} + \frac{M}{2G} = 0 ,$$

$$P_0 - \mu - T \ln(n^{-1} - 1) = 0 .$$

При $T = 0$. Для ферми-конденсата предлагается в качестве опорного рассматривать второе уравнение системы, и искать решение в виде

$$T \equiv 0 ,$$

$$P_0 = \mu ,$$

вырожденное по энергии (аналогичное поведение демонстрирует и модель ККБ). Откуда для динамической массы кварка имеем

$$M_q = \pm(\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$$

Фермионный конденсат

Стандартная ступенька Ферми

$$n = \frac{1}{e^{\beta(P_0 - \mu)} + 1} , \quad P_0 = [\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p})]^{1/2}$$

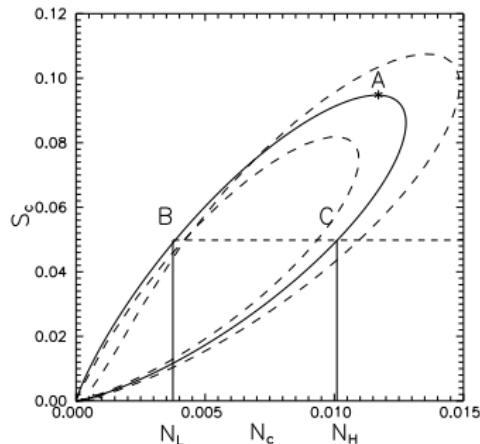
Динамическая масса кварка

$$\frac{M_q}{P_0} = \frac{M}{2G} , \quad n = 0 , \quad |\mathbf{p}| > P_F ,$$
$$M = 0 , \quad n = 1 , \quad |\mathbf{p}| < P_F .$$

Для ферми-конденсата

$$n_{\pm} = 1 - \frac{\mu}{2G} \pm \frac{\mu}{2G} \frac{m}{(\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}}$$

Фермионный конденсат



Плотность энтропии (на $\Phi \text{м}^3$), как функция плотности кваркового ансамбля (на $\Phi \text{м}^3$) для состояния фермионного конденсата. Сплошная кривая получена в киральном пределе.

Фермионный конденсат

$$-(1 - n - \bar{n}) \frac{M_q}{P_0} + \frac{M}{2G} = 0 \quad (T \neq 0)$$

$$P_0 - \mu - T \ln(n^{-1} - 1) = 0$$

$$P_0 + \mu - T \ln(\bar{n}^{-1} - 1) = 0$$

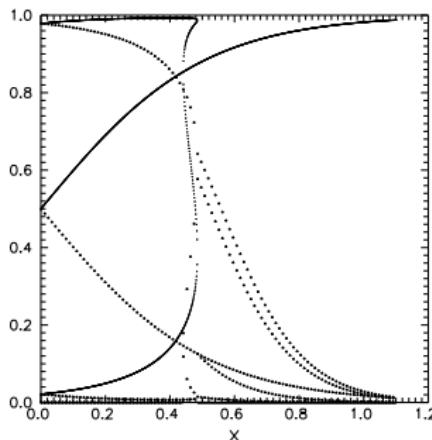
$$(m \rightarrow 0) \quad 1 - n - \bar{n} = \frac{P_0}{2G}$$

Возможны случаи, когда энергия кварка становится отрицательной (связанное состояние квазичастицы). При ненулевой динамической массе $-2G < P_0 < 2G$. При $P_0 > 2G$, $M_q = M = 0$

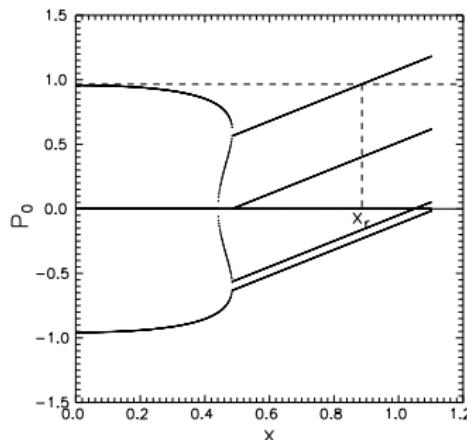
$$(x = \mu/(2G), y = T/(2G)) \quad \bar{n} = \left(e^{2x/y + \ln(n^{-1} - 1)} + 1 \right)^{-1}$$

$$1 - n - \bar{n} = x + y \ln(n^{-1} - 1)$$

Фермионный конденсат

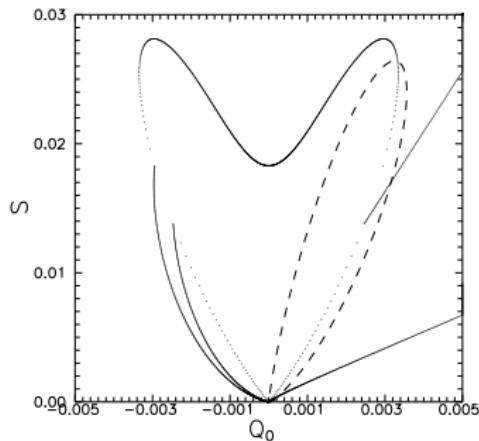


Пять ветвей решений уравнений для плотности кварков и антикварков (которые отвечают кривым с более разреженными точками) с параметром $y = 0.25$, как функция параметра x .



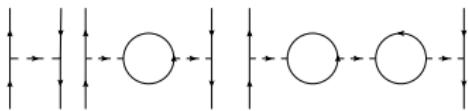
Энергия кварка P_0 для представленных решений. Интересно отметить, что имеются корни, с отрицательной энергией.

Фермионный конденсат



Плотность энтропии, как функция плотности барионного заряда, при температуре $y = 0.25$. Штриховая линия отвечает нулевой температуре.

Константа взаимодействия



Первые члены ряда теории возмущений для наблюдаемой константы связи.

$$\tilde{\Pi}^{\pi,\sigma} = 4N_c \int \frac{d\tilde{\mathbf{k}}}{E} \frac{-2E^2 + M^2 \mp M^2}{\varepsilon^2/4 - E^2}$$

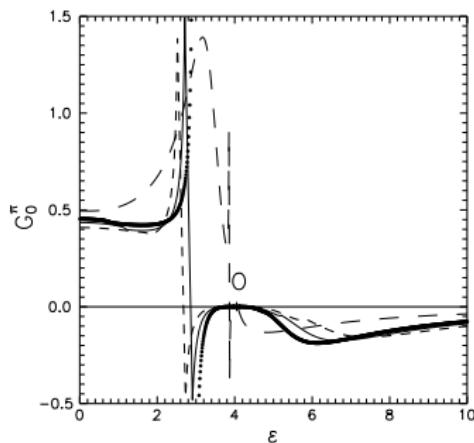
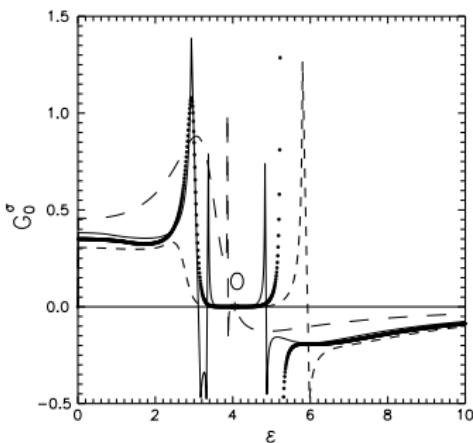
где ε —передаваемая энергия, $E = [\mathbf{k}^2 + M^2(\mathbf{k})]^{1/2}$ —энергия квазичастицы в петле. V —объем.

$$G_o = G + VG\tilde{\Pi} + (VG\tilde{\Pi})^2 + \dots$$

$$\Pi = \tilde{\Pi} - \Pi_0$$

$$G_o^{\pi,\sigma} = \frac{G}{1 - VG^3\Pi^{\pi,\sigma}}$$

Фермионный конденсат



Наблюдаемая константа связи G_o^{σ} как функция передаваемой энергии ε (в безразмерных переменных). Штриховая кривая получена для $m = 0.9$. Точками показан случай $m = 0.6$. Сплошная линия отвечает случаю $m = 0.4$. Всюду параметр $V = 1$. Точка O показывает место, где $G_o^{\pi,\sigma} = 0$. Штриховая кривая с большим шагом отвечает $m = 0.01$.

Наблюдаемая константа связи G_o^{σ} как функция передаваемой энергии ε . Обозн. аналогичны случаю скалярного мезона.

Выводы

- 1) Если бы кварковые капли существовали в природе, то по своим свойствам они напоминали бы ядерную материю.
- 2) По-видимому реализован сценарий (частичного) восстановления киральной симметрии и наблюдается смешанная фаза вакуума и барионной материи уже для нормальных условий.
- 3) По своему физическому смыслу лагранжиан Гинзбурга–Ландау описывает баланс прихода и ухода токовых кварков из одной фазы в другую, наподобие молекул воды для находящихся в равновесии жидкости и газа.
- 4) Характерное число формирующих квазичастицу токовых кварков примерно одинаково для вакуума и для заполненных состояний, и определяется, в основном, импульсом обрезания Λ . В этом динамическом смысле вакуум также плотен, как и барионная материя, а наше восприятие только барионного заряда, как плотности материи, может оказаться всего лишь некоторой иллюзией, связанной с измеримостью величины заряда одной из фаз.