Система уравнений Швингера-Дайсона и асимптотическое поведение в евклидовой области

В. Е. Рочев

7 ноября 2013 г.

Введение

Проблема асимптотического поведения при больших импульсах (или на малых расстояниях) является одной из старейших проблем квантовой теории поля (КТП). Эта проблема решена только для асимптотически свободной модели неабелева калибровочного поля. Решение проблемы асимптотики для других физически значимых моделей (квантовой электродинамики, самодействующего скалярного поля, юкавского взаимодействия) требует выхода за рамки приближения слабой связи, т.е. проблема асимптотического поведения в четырехмерных моделях без асимптотической свободы является частью общей проблемы неслабой связи в КТП.

В настоящем докладе дан краткий обзор недавних работ автора по построению решений системы уравнений Швингера-Дайсона в двухчастичном приближении, обладающих самосогласованным асимптотическим поведением в глубоко евклидовой области.

Уравнения Швингера-Дайсона

Скалярная модель Юкавы ($x \in E_4$)

$$\mathcal{L}_{int} = g\phi^*\phi\chi$$

ϕ – фион, χ – хион.

При δ-образном пропагаторе хиона эта модель описывает скалярное комплексное поле с самодействием $(\phi^*\phi)^2$ (см. ниже)

Производящий функционал

$$G(\eta, j) = \int D(\phi, \phi^*, \chi) \exp\left\{ \int dx\, \mathcal{L}(x) - \phi^*(y) \cdot \eta(y, x) \cdot \phi(x) + j(x) \cdot \chi(x) \right\}.$$

$\eta(x, y)$ – билокальный источник фионного поля – удобен для построения непертурбативных разложений (напр., $1/N$-разложения, приближения среднего поля и др.)

Уравнения Швингера-Дайсона

УШД в функциональных производных:

$$g\left[\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta\delta j}+\frac{\delta Z}{\delta j}\frac{\delta Z}{\delta\eta}\right]=(m^2-\partial_x^2)\frac{\delta Z}{\delta\eta}+\eta\cdot\frac{\delta Z}{\delta\eta}+\delta$$

$$\frac{\delta Z}{\delta j}=D_c\cdot j-gD_c\cdot\frac{\delta Z}{\delta\eta}$$

Здесь

$$Z=\log G$$

$$D_c=(\mu^2-\partial^2)^{-1}$$

и

$$A\cdot B\equiv\int dx_1\, A(x_1)B(x_1)$$

Уравнения Швингера-Дайсона

Исключая дифференцирование по j, мы получаем уравнение

$$g^2 D_c \cdot \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta^2} + \frac{\delta Z}{\delta\eta}\frac{\delta Z}{\delta\eta}\right] + (m^2 - \partial_x^2)\frac{\delta Z}{\delta\eta} + \eta \cdot \frac{\delta Z}{\delta\eta} + \delta = 0,$$

содержащее производные только по источнику η.
Последовательное дифференцирование этого уравнения дает нам бесконечную систему уравнений Дайсона-Швингера.

Переход к теории самодействующего скалярного поля с $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2$:

$$g^2 D_c(x-y) \Rightarrow -\lambda\delta(x-y).$$

Система уравнений Дайсона-Швингера

Система уравнений Дайсона-Швингера (производные УШД при выключенном источнике):

Уравнение для пропагатора:

$$(\bar{m}^2 - \partial^2)\Delta = \delta + g^2 D_c \cdot Z_2$$

Уравнение для двухчастичной функции Z_2:

$$(\bar{m}^2 - \partial^2) Z_2 - g^2 D_c \cdot Z_2 \, \Delta +$$

$$+ g^2 D_c \cdot Z_3 = \delta \, \Delta$$

и т.д.

Здесь $\Delta \equiv -\delta Z/\delta\eta|_{\eta=0}$, $Z_n \equiv \delta^n Z/\delta\eta^n|_{\eta=0}$, $\bar{m}^2 = m^2 - \frac{g^2}{\mu^2}\Delta(x=0)$.

Приближение среднего поля

$$g^2 D_c \cdot \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta\eta}\,\frac{\delta Z^{(0)}}{\delta\eta} + (m^2 - \partial^2)\frac{\delta Z^{(0)}}{\delta\eta} + \eta\cdot\frac{\delta Z^{(0)}}{\delta\eta} + \delta = 0.$$

Пропагатор фиона

$$\Delta_0^{-1}(p) = \bar{m}^2 + p^2.$$

Двухчастичная функция (связная часть)

$$Z_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \Delta_0(x - x_1)\Delta_0(x' - x_2)\cdot f_0(x_1 - x_2)\cdot\Delta_0(x_1 - y)\Delta_0(x_2 - y'),$$

где

$$f_0^{-1}(x) = \frac{1}{g^2}D_c^{-1}(x) - L_0(x)$$

и $L_0(x) = \Delta_0(x)\Delta_0(-x)$ – скалярная петля.

Критическая константа связи

Перенормированный пропагатор хиона:

$$D_r^{-1}(p^2) = \mu_r^2 + p^2 - g^2 L_r(p^2),$$

где $L_r(p^2) = L_0(p^2) - L_0(0) - p^2 L_0'(0)$.

При $p^2 \to +\infty$

$$D_r^{-1}(p^2) = (1 - \frac{g^2}{96\pi^2 m_r^2})p^2 + \frac{g^2}{16\pi^2} \log \frac{p^2}{m_r^2} + O(1).$$

Последовательность n-частичных приближений

Система УДШ, порождаемая фунционально-дифференциальным уравнением УШД, есть бесконечный набор интегральных уравнений для n-частичных фионных функций $Z_n \equiv \delta^n Z/\delta\eta^n|_{\eta=0}$.
n-ое уравнение есть $(n-1)$-ая производная функционально-дифференциального уравнения по источнику η при $\eta = 0$ и включает в себя набор фионных функций от одночастичной (пропагатора фиона) до $n+1$-частичной.
Для того, чтобы получить последовательность замкнутых систем уравнений, поступим следующим образом: мы будем называть n-частичным приближением системы УДШ систему уравнений, в которой первые $n-1$ уравнений являются точными, а в n-ом уравнении опущен член, содержащий $(n+1)$-частичную функцию. Ясно, что при $n \to \infty$ эта последовательность приближений стремится к точной системе УДШ.
Одночастичное приближение есть просто УШД при $\eta = 0$ без Z_2, и решение его есть свободный пропагатор.

2ЧП

Двухчастичное приближение (2ЧП) есть система уравнений

$$(\bar{m}^2 - \partial^2)\Delta = \delta + g^2 D_c \cdot Z_2$$

$$(\bar{m}^2 - \partial^2)Z_2 - g^2 D_c \cdot Z_2\,\Delta =$$

$$= \delta\,\Delta.$$

Для сравнения: уравнения приближения среднего поля для пропагатора и Z_2 имеют вид

$$(\bar{m}^2 - \partial^2) = \delta$$

$$(\bar{m}^2 - \partial^2)Z_2 - g^2 D_c \cdot Z_2\,\Delta =$$

$$= \delta\,\Delta.$$

Система уравнений 2ЧП для пропагаторов

В рамках 2ЧП функцию Z_2 можно выразить как функционал от Δ, что дает нам систему уравнений для пропагаторов хиона и фиона:

$$D^{-1}(p^2) = \mu^2 + p^2 - g^2 L(p^2)$$

$$\Delta^{-1}(p^2) = \bar{m}^2 + p^2 - g^2 K(p^2)$$

где

$$L(p^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_c(p+q)\Delta(q), \quad K(p^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_c(p-q)D(q).$$

Система перенормированных уравнений:

$$D_r^{-1}(p^2) = \mu_r^2 + p^2 - g^2 L_r(p^2)$$

$$\Delta_r^{-1}(p^2) = m_r^2 + p^2 - g^2 K_r(p^2),$$

где

$$L_r = L(p^2) - L(0) - p^2 L'(0), \; K_r = K(p^2) - K(0) - p^2 K'(0).$$

Результаты

Для модели с взаимодействием $g\phi^*\phi\chi$ в двухчастичном приближении системы уравнений Дайсона-Швингера происходит разделение области значений константы связи на три интервала:

1. Область слабой связи $g^2 \leq g_{c1}^2 = 32\pi^2 \min\{\mu^2, m^2\}$ с асимптотически свободным поведением пропагаторов полей в ультрафиолетовой области.

2. Область промежуточной связи $g_{c1}^2 < g^2 \leq g_{c2}^2 = 32\pi^2 \max\{\mu^2, m^2\}$, в которой не существует самосогласованных решений без сингулярностей Ландау.
При равных массах эта область вырождается в точку $g^2 = g_c^2$, в которой пропагаторы обладают самосогласованным поведением $1/\sqrt{p^2}$ ("фермионо-подобное" поведение).

3. Область сильной связи $g^2 > g_{c2}^2$, в которой асимптотики пропагаторов есть положительные константы
– поведение ультралокального типа.

Скалярное поле с самодействием

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2$$

Приближение среднего поля ($\equiv$ главный порядок $1/N$-разложения):

Перенормированная амплитуда (связная часть ампутированной двухчастичной функции)

$$f(p) = \frac{\lambda}{1 + \lambda L_r(p)}$$

($L_r(p)$ – перенормированная петля) содержит полюс Ландау в точке $p^2 = M_L^2$:

$$M_L \cong m \exp\{\frac{8\pi^2}{\lambda}\}$$

при всех положительных значениях константы связи λ.

Двухчастичное приближение в модели скалярного поля с самодействием: результаты

Асимптотика амплитуды:

В области $\lambda_{cr} < \lambda < 2\lambda_{cr}$ при больших p^2

$$f \simeq 2(\lambda - \lambda_{cr}) + O(1/p^2),$$

где

$$\lambda_{cr} = 16\pi^2.$$

В данной модели существует интервал значений константы связи $\lambda_{cr} < \lambda < 2\lambda_{cr}$, в котором амплитуда в двухчастичном приближении обладает самосогласованным асимптотическим поведением: константа + убывающий член.

При $\lambda < \lambda_{cr}$ амплитуда содержит полюс Ландау.

Двухчастичное приближение в модели скалярного поля с самодействием: результаты

В точке $\lambda = \lambda_{cr}$ не удается построить самосогласованное решение для амплитуды (решение становится комплекснозначным).

При $\lambda \to 2\lambda_{cr}$ и $p^2 \to \infty$:

$$f(p^2) \to 2\lambda_{cr} = f(0)$$

("асимптотическое восстановление" амплитуды).

При $\lambda > \lambda_{cr}$ константы перенормировки становятся комплексными, т.е. рассматриваемое приближение становится внутренне противоречивым.

Модель Юкавы

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\psi}i\gamma_5\psi\phi$$

ψ – спинорное поле, ϕ – бозонное псевдоскалярное поле.

Приближение среднего поля ($\equiv$ главный порядок $1/N$-разложения):

Перенормированный пропагатор бозона Δ имеет полюс Ландау в евклидовой области импульсов при всех значениях константы связи $g^2 > 0$.

Двухчастичное приближение в модели Юкавы: результаты

В двухчастичном приближении система УШД для пропагаторов фермиона и бозона имеет самосогласованное решение без нефизических сингулярностей в евклидовой области.

Асимптотика пропагатора псевдоскалярного бозона при $p^2 \to \infty$:

$$\Delta \sim \frac{1}{p^2 \log^{4/5} \frac{p^2}{M^2}}$$