Алгебра связей в бигравитации

В.О. Соловьев

Институт физики высоких энергий (Протвино)

Международная сессия-конференция секции ядерной физики
ОФН РАН, Протвино, 5-8 ноября, 2013

Темная энергия остается проблемой

Бигравитация

Лагранжиан бигравитации

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} - \sqrt{-f}\,U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

составлен из двух почти независимых частей

$$\mathcal{L}^{(f)} = \frac{1}{16\pi G^{(f)}}\sqrt{-f}\,f^{\mu\nu}R^{(f)}_{\mu\nu} + \mathcal{L}^{(f)}_M(\psi^A, f_{\mu\nu}),$$

$$\mathcal{L}^{(g)} = \frac{1}{16\pi G^{(g)}}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R^{(g)}_{\mu\nu} + \mathcal{L}^{(g)}_M(\phi^A, g_{\mu\nu}),$$

и из потенциала взаимодействия

$$\sqrt{-f}\,U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}) \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{fg}\,V(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}) \quad \text{или} \quad \sqrt{-g}\,W(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

Связи и степени свободы

$$\text{DoF} = \frac{2N - 2N_1 - N_2}{2}$$

	ОТО	БиГ (общая)	БиГ (dRGT)	? ЧаБе ?
переменные $(2N)$	(γ_{ij}, π^{ij})	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij})	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij})	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij})
1-го рода (N_1)	$\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$ $\mathcal{S}, \Omega$
2-го рода (N_2)	—	—	$\mathcal{S}, \Omega$	—
DoF	2	8	7	6

Публикации

Биогравитация в гамильтоновом формализме Кухаржа. Общий случай.
В.О. Соловьев, М.В. Чичикина.
ТМФ, том 176, выпуск 3, стр. 393 - 407 (2013, сентябрь);
arXiv:1211.6530;

Bigravity in Kuchar's Hamiltonian formalism: The special case.
Vladimir O. Soloviev and Margarita V. Tchichikina.
Phys. Rev. D, vol. 88, iss. 8, 084026 (2013, October, 15)
arXiv:1302.5096.

Функции вложения гиперповерхностей

$$X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i),$$

их производные

$$N^\alpha \equiv \frac{\partial e^\alpha}{\partial \tau}, \qquad e_i^\alpha \equiv \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^i}.$$

Индуцированные метрики

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu, \quad \eta_{ij} = f_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu.$$

Два поля единичных нормалей $n^\alpha(x^i)$ и $\bar{n}^\alpha(x^i)$ связаны формулой

$$n^\alpha = u\bar{n}^\alpha + u^i e_i^\alpha,$$

два базиса (n^α, e_i^α), $(\bar{n}^\alpha, e_i^\alpha)$, применимы для $3+1$-разложения векторов или тензоров в пространстве-времени.

Удобно использовать переменные

$$u = \frac{1}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}}, \qquad u^i = -\frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}}.$$

Два набора функций смещения и сдвига связаны формулами:

$$\bar{N} = uN, \qquad \bar{N}^i = N^i + u^i N,$$

выражая новые переменные через старые, получаем

$$u = \frac{\bar{N}}{N}, \qquad u^i = \frac{\bar{N}^i - N^i}{N}.$$

При обычном ADM-разложении используется координатный базис:

$$||g^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -\bar{N}^{-2} & \bar{N}^j \bar{N}^{-2} \\ \bar{N}^i \bar{N}^{-2} & \gamma^{ij} - \bar{N}^i \bar{N}^j \bar{N}^{-2} \end{pmatrix},$$

$$||f^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -N^{-2} & N^j N^{-2} \\ N^i N^{-2} & \eta^{ij} - N^i N^j N^{-2} \end{pmatrix}.$$

При разложении Кухаржа (в базисе f-метрики):

$$||g^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -u^{-2}[n^\mu n^\nu] & u^j u^{-2}[n^\mu e_j^\nu] \\ u^i u^{-2}[e_i^\mu n^\nu] & (\gamma^{ij} - u^i u^j u^{-2})[e_i^\mu e_j^\nu] \end{pmatrix},$$

$$||f^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -[n^\mu n^\nu] & 0 \\ 0 & \eta^{ij}[e_i^\mu e_j^\nu] \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан

$$\mathrm{H}_{\mathrm{canonical}} = \int d^3x \left[N \left(\mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i \bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U} \right) + N^i \left(\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i \right) \right].$$

Первичные связи

$$\pi_N = 0, \quad \pi_{N^i} = 0, \quad \pi_u = 0, \quad \pi_{u^i} = 0.$$

Вторичные связи

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i \bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U} = 0,$$

$$\mathcal{R}_i \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0,$$

$$\mathcal{S} \equiv \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = 0, \qquad \mathcal{S}_i \equiv \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = 0.$$

Так как якобиан для связей $\mathcal{S}, \mathcal{S}_i$ является гессианом для потенциала $\tilde{U}$

$$\frac{D(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i)}{D(u, u^j)} = \left| \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b} \right|,$$

то в случае, когда он не вырожден, можно разрешить уравнения связей $\mathcal{S}, \mathcal{S}_i$ относительно переменных u, u^i и исключить все связи второго рода $(\pi_a, \mathcal{S}_b)$. Можно вместо этого перейти от скобок Пуассона к скобкам Дирака. Тогда DoF=8.

Следовательно, для уменьшения числа степеней свободы необходимо потребовать обращения гессиана в ноль. В математике такое условие на потенциал бигравитации называется уравнением Монжа-Ампера

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b} \right| = 0.$$

Таблица скобок Дирака между связями

$\{,\}_{\tilde D}$	$\pi_u(y)$	$\Psi(y)$	$\Omega(y)$	$\mathcal{S}(y)$	$\mathcal{R}(y)$	$\mathcal{R}_j(y)$
$\pi_u(x)$ (1-ная)	0	$\neq 0$	$-\hat\Theta = 0$	0	≈ 0	0
$\Psi(x)$ (4-ная)	$\neq 0$					
$\Omega(x)$ (3-ная)	$\hat\Theta = 0$			$\neq 0$	$\Psi \approx 0$	≈ 0
$\mathcal{S}(x)$ (2-ная)	0		$\neq 0$	$\hat\Theta = 0$	≈ 0	≈ 0
$\mathcal{R}(x)$ (2-ная)	≈ 0		$-\Psi \approx 0$	≈ 0	≈ 0	≈ 0
$\mathcal{R}_i(x)$ (2-ные)	0		≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

Для потенциала общего вида скобка Дирака связи $\mathcal{S}$ с самой собой отлична от нуля:

$$\{\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y\}_D = (\Theta^i - \bar{U}^i \mathcal{S})_x \delta_{,i}(x, y) - (\Theta^i - \bar{U}^i \mathcal{S})_y \delta_{,i}(y, x).$$

Однако если потенциал удовлетворяет уравнению Монжа-Ампера, используя технику неявного решения (Fairlie-Leznov, 1994) можно доказать, что $\Theta^i = 0$. Кроме того

$$\{\mathcal{R}(x), \mathcal{S}(y)\}_{\tilde{D}} = \left(u^i - u\bar{U}^i\right) \mathcal{S}(x)\delta_{,i}(x, y) - \left(u(\bar{U}^i \mathcal{S})_{,i} + \Omega\right) \delta(x, y),$$

это дает новую связь $\Omega = 0$. Находим также

$$\begin{aligned} \{\mathcal{R}(x), \pi_u(y)\}_{\tilde{D}} &= \mathcal{S}(x)\delta(x, y), \\ \{\Omega(x), \pi_u(y)\}_{\tilde{D}} &= \Theta^i(x)\delta_{,i}(x, y) - \Theta^i(y)\delta_{,i}(y, x) : \end{aligned} \tag{1}$$

Четвертичная связь Ψ возникает из условия

$$\{\Omega_x, \mathrm{H}\}_D \approx \int d^3y \{\Omega_x, \mathcal{R}_y\}_D N_y \approx \int d^3y \Psi_x \delta(x,y) N_y = 0,$$

здесь Ψ линейна по переменной u, т.к. $\mathcal{R} = u\mathcal{S} + \dots$ и поэтому это уравнение можно разрешить относительно u.

Тождество Якоби

$$\{\Omega, \{\pi_u, \mathcal{R}\}_{\tilde{D}}\}_{\tilde{D}} + \{\mathcal{R}, \{\Omega, \pi_u\}_{\tilde{D}}\}_{\tilde{D}} + \{\pi_u, \{\mathcal{R}, \Omega\}_{\tilde{D}}\}_{\tilde{D}} = 0,$$

позволяет связать две скобки Дирака

$$\{\pi_u(y), \Psi(x)\}_{\tilde{D}} \delta(x,z) = -\{\Omega(x), \mathcal{S}(z)\}_{\tilde{D}} \delta(z,y),$$

так что если $\{\Omega, \mathcal{S}\}_{\tilde{D}} \neq 0$, то и $\{\pi_u, \Psi\}_{\tilde{D}} \neq 0$. Но в скобке $\{\Omega, \mathcal{S}\}_{\tilde{D}}$ есть отличные от нуля члены, например,

$$[[V, \mathcal{H}], \bar{\mathcal{H}}] = \frac{4\kappa^{(f)}\kappa^{(g)}}{\sqrt{\eta\gamma}} \left(\Pi_{ij} - \eta_{ij}\frac{\Pi}{2}\right) \frac{\partial^2 V}{\partial\eta_{ij}\partial\gamma_{mn}} \left(\pi_{mn} - \gamma_{mn}\frac{\pi}{2}\right) \neq 0,$$

и они не могут сокращаться с другими, т.к. подобные комбинации больше нигде не встречаются.

Аксиомы для потенциала

Существует дифференцируемая функция $\tilde{U} = \tilde{U}(u, u^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij})$.
Общекоординатная инвариантность требует

$$\begin{aligned} 2\eta_{ik}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta_{jk}} + 2\gamma_{ik}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{jk}} - u^j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} - \delta^j_i \tilde{U} &= 0, \\ 2u^j \gamma_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{ik}} - u^i u \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{ik} - u^2\gamma^{ik} - u^i u^k\right)\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} &= 0. \end{aligned}$$

Большой гессиан должен быть вырожденным

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}\right| = 0, \qquad u^a = (u, u^i).$$

Малый гессиан должен быть невырожденным

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^i \partial u^j}\right| \neq 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

	БиГ (общая)	то же	БиГ (dRGT)	то же
переменные $(2N)$	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij}) 24	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij}) (u^a, π_a) 32	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij}) 24	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij}) (u^a, π_a) 32
1-го рода class (N_1)	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$ 4	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$ 4	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$ 4	$\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$ 4
2-го рода (N_2)	 0	$\pi_a, \mathcal{S}_a$ 8	 $\mathcal{S}, \Omega$ 2	$\pi_i, \mathcal{S}_i$ $\pi, \mathcal{S}, \Omega, \Psi$ 10
DoF	8	8	7	7

Алгебра связей первого рода

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y\} &= \left(\eta^{ij}\mathcal{R}_j + uu^i\mathcal{S} - (\eta^{ij} - u^2\gamma^{ij} - u^i u^j)\mathcal{S}_j + Q^i\right)_x \delta_{,i}(x,y) \\
&- \left(\eta^{ij}\mathcal{R}_j + uu^i\mathcal{S} - \left(\eta^{ij} - u^2\gamma^{ij} - u^i u^j\right)\mathcal{S}_j + Q^i\right)_y \delta_{,i}(y,x) \\
&\approx \left(\eta^{ij}\mathcal{R}_j + Q^i\right)(x)\delta_{,i}(x,y) - \left(\eta^{ij}\mathcal{R}_j + Q^i\right)(y)\delta_{,i}(y,x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{R}_{ix}, \mathcal{R}_y\} &= \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x,y) + u_{,i}\mathcal{S}\delta(x,y) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^j}\left(Q^j_i(x)\delta(x,y)\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^j}\left(u^j\mathcal{S}_i(x)\delta(x,y)\right) + u^j_{,i}\mathcal{S}_j\delta(x.y) \approx \\
&\approx \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x,y) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(Q^j_i(x)\delta(x,y)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\{\mathcal{R}_i(x), \mathcal{R}_j(y)\} = \mathcal{R}_i(y)\delta_{,j}(x,y) + \mathcal{R}_j(x)\delta_{,i}(x,y).
$$

Требования к потенциалу

$$Q^i_k = 2\eta_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\eta_{ij}} + 2\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{ij}} - u^i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} - \delta^i_k\tilde{U} = 0,$$

$$Q^\ell = 2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{k\ell}} - u^\ell u\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{k\ell} - u^2\gamma^{k\ell} - u^k u^\ell\right)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} = 0.$$

Трудности массивной гравитации

- Boulware-Deser ghost (отрицательная кинетическая энергия)
- Проблемы с причинностью (два различных световых конуса)
- Неприменимость теории возмущения на малых расстояниях (Vainshtein radius)
- Отсутствие гамильтоновой связи (начальные условия произвольны)

S. Deser, A. Waldron (arxiv:1212.5835):
"*...направление оставалось мертвым до недавнего (независимого) переоткрытия (де Рам, Габададзе, Толи, 2011) результатов Весса и Зумино 1970 года. Эксгумация породила, что неудивительно, огромную индустрию. Мы намерены снова похоронить его, по крайней мере, одну из моделей.*"