Математические свойства космологических моделей с неминимально взаимодействующими скалярными полями

С.Ю. Вернов

НИИЯФ МГУ

Протвино, 6 ноября 2013

Пространственно плоская метрика Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

активно используется для описания космологических решений.

Пространственно плоская метрика Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = \, - dt^2 + a^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

активно используется для описания космологических решений. Модели со скалярными полями.

Пространственно плоская метрика
Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = \, - dt^2 + a^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

активно используется для описания космологических решений.
Модели со скалярными полями.
Скалярно-тензорная формулировка модифицированной гравитации.

Пространственно плоская метрика
Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

активно используется для описания космологических решений.
Модели со скалярными полями.
Скалярно-тензорная формулировка модифицированной гравитации.
Идея описать инфляцию с помощью бозона Хиггса, предсказанного Стандартной моделью элементарных частиц (F.L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* B **659** (2008) 703–706, arXiv:0710.3755).
Одной из особенностей инфляционных моделей с полем Хиггса в качестве инфлатона является неминимальное взаимодействие с гравитацией.

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА БЕЗ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим космологическую модель, описываемую действием:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[U(\sigma)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu} - V(\sigma)\right], \tag{1}$$

В ФЛРУ метрике с параметрическим временем:
$ds^2 = -N^2(\tau)d\tau^2 + a^2(\tau)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$,
получаем следующие уравнения

$$6UH^2 + 6U'H = \frac{1}{2}\sigma'^2 + N^2V, \tag{2}$$

$$2U\left(2H' + 3H^2 - 2\frac{N'}{N}H\right) = -\frac{\sigma'^2}{2} - 2U'' - 4HU' + 2\frac{N'}{N}U' + N^2V, \tag{3}$$

$$U_{,\sigma}R + \Box\sigma + V_{,\sigma} = 0. \tag{4}$$

Штрих обозначает производную по τ. Функция $H \equiv a'/a$ - не параметр Хаббла, поскольку τ — не космическое время.

$$R = -\frac{6}{N^2}\left(H' + 2H^2 - \frac{N'}{N}H\right), \qquad \Box\sigma = \frac{1}{N^2}\left(\sigma'' + 3H\sigma' - \frac{N'}{N}\sigma'\right).$$

Новые переменные.

Введём новую переменную

$$Q \equiv H + \frac{U'}{2U}. \tag{5}$$

Уравнение (2) имеет следующий вид

$$3Q^2 = \frac{\sigma'^2}{4U} + \frac{3U'^2}{4U^2} + \frac{N^2 V}{2U}. \tag{6}$$

Введя новое скалярное поле φ с помощью соотношения:

$$\frac{\kappa^2}{2}\varphi'^2 \equiv \frac{\sigma'^2}{4U} + \frac{3U'^2}{4U^2} = \frac{U + 3U_{,\sigma}^2}{4U^2}\sigma'^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = \sqrt{\frac{U + 3U_{,\sigma}^2}{2\kappa^2 U^2}}. \tag{7}$$

где $\kappa^2 \equiv 8\pi/M_{\mathrm{Pl}}^2$, M_{Pl} — масса Планка.
Теперь уравнение (2) имеет вид:

$$3Q^2 = \frac{\kappa^2}{2}\varphi'^2 + \frac{N^2 V}{2U}. \tag{8}$$

Разница уравнений (3) и (2) в терминах Q и φ имеет вид:

$$Q' - \left(\frac{N'}{N} + \frac{U'}{2U}\right) Q = -\frac{\kappa^2}{2}\varphi'^2. \tag{9}$$

Введя новые функции

$$B = \ln(N\sqrt{U}), \qquad W = \frac{V}{2\kappa^2 U^2}, \tag{10}$$

перепишем (8) и (9):

$$3Q^2 = \kappa^2 \left[\frac{\varphi'^2}{2} + e^{2B} W\right], \qquad Q' - B'Q = -\frac{\kappa^2}{2}\varphi'^2. \tag{11}$$

Следствием этой системы является уравнение для поля φ:

$$\varphi'' + (3Q - B')\varphi' + e^{2B} W_{,\varphi} = 0. \tag{12}$$

Полученные уравнения (11) являются уравнениями Фридмана для космологической модели с минимально взаимодействующим скалярным полем φ, потенциалом W и интервалом:

$$ds^2 = -e^{2B(\tau)} d\tau^2 + \tilde{a}^2(\tau)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right), \tag{13}$$

где $Q = \tilde{a}'/\tilde{a}$. При $N = 1/\sqrt{U}$, $\quad B = 0$.
Следовательно, τ — космическое время для фрейма Эйнштейна.

Рассмотрим процедуру реконструкции потенциала скалярного поля по заданному поведению параметра Хаббла. При $N = 1$ получаем следующие уравнения из (2) и (3):

$$6UH^2 + 6\dot{U}H = \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V, \tag{14}$$

$$4U\dot{H} - 2\dot{U}H + 2\ddot{U} + \dot{\sigma}^2 = 0. \tag{15}$$

Точка обозначает производную по времени τ, которое при $N = 1$ является космическим для фрейма Жордана.

Пусть $\quad H = Y(\sigma), \qquad \dot{\sigma} = F(\sigma),$

тогда (15) примет вид

$$4U\dot{H} - 2\dot{U}H + 2\ddot{U} + \dot{\sigma}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4UY_{,\sigma} + 2(F_{,\sigma} - Y)U_{,\sigma} + (2U_{,\sigma\sigma} + 1)F = 0. \tag{16}$$

Потенциал

$$V(\sigma) = 6UY^2 + 6U_{,\sigma}FY - \frac{1}{2}F^2. \tag{17}$$

Уравнение (16) содержит 3 функции.
Если 2 из них даны, третья — решение линейного дифференциального уравнения.
Если $U(\sigma)$ и $F(\sigma)$ заданы, то

$$Y(\sigma) = -\left(\int^{\sigma} \frac{2F_{,\tilde{\sigma}}U_{,\tilde{\sigma}} + (2U_{,\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} + 1)F}{4U^{3/2}} d\tilde{\sigma} + c_0\right)\sqrt{U} \qquad (18)$$

Если $U(\sigma)$ и $Y(\sigma)$ заданы, то

$$F(\sigma) = \left[\int^{\sigma} \frac{U_{,\tilde{\sigma}}Y - 2UY_{,\tilde{\sigma}}}{U_{,\tilde{\sigma}}} e^{\Upsilon} d\tilde{\sigma} + \tilde{c}_0\right] e^{-\Upsilon(\sigma)}, \qquad (19)$$

где

$$\Upsilon(\sigma) \equiv \frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{2U_{,\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} + 1}{U_{,\tilde{\sigma}}} d\tilde{\sigma}.$$

МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ С НЕМОНОТОННЫМ ПАРАМЕТРОМ ХАББЛА

A.Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, and S.Yu.V.,
Phys. Rev. D **87** (2013) 063503, arXiv:1211.6272.

Одно и то же поведение $\sigma(t)$ соответствует точно разрешимым моделям с различными потенциалами и качественно различным поведением параметра Хаббла.

Пусть $U(\sigma) = \xi\sigma^2$,

$$Y(\sigma) = A_2\sigma^2 + A_1\sigma + A_0, \qquad A_k \text{ — константы.}$$

Функция $F(\sigma)$ **НЕ ЗАВИСИТ ОТ** A_1:

$$F(\sigma) = \frac{4\xi}{8\xi+1}A_0\sigma - \frac{4\xi}{16\xi+1}A_2\sigma^3 + \tilde{c}_0\sigma^{-\frac{1+4\xi}{4\xi}}.$$

МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ С НЕМОНОТОННЫМ ПАРАМЕТРОМ ХАББЛА

A.Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, and S.Yu.V.,
Phys. Rev. D **87** (2013) 063503, arXiv:1211.6272.

Одно и то же поведение $\sigma(t)$ соответствует точно разрешимым моделям с различными потенциалами и качественно различным поведением параметра Хаббла.

Пусть $U(\sigma) = \xi\sigma^2$,

$$Y(\sigma) = A_2\sigma^2 + A_1\sigma + A_0, \qquad A_k \text{ — константы.}$$

Функция $F(\sigma)$ **НЕ ЗАВИСИТ ОТ** A_1:

$$F(\sigma) = \frac{4\xi}{8\xi+1}A_0\sigma - \frac{4\xi}{16\xi+1}A_2\sigma^3 + \tilde{c}_0\sigma^{-\frac{1+4\xi}{4\xi}}.$$

При $\tilde{c}_0 = 0$, функция $F(\sigma)$ — кубический полином и уравнение $\dot{\sigma} = F(\sigma)$ имеет общее решение:

$$\sigma(t) = \pm\frac{\sqrt{(16\xi+1)A_0}}{\sqrt{(16\xi+1)A_0c_2e^{-\omega t} + (8\xi+1)A_2}}, \tag{20}$$

где $\omega = 8\xi A_0/(8\xi+1)$, c_2 — константа интегрирования.

Потенциал является полиномом шестого порядка и имеет вид (при $\xi = 1$):

$$\begin{aligned} V(\sigma) &= \frac{910}{289}A_2^2\sigma^6 + \frac{156}{17}A_1A_2\sigma^5 + \\ &+ \left(6A_1^2 + \frac{2236}{153}A_0A_2\right)\sigma^4 + \frac{52}{3}A_0A_1\sigma^3 + \frac{910}{81}A_0^2\sigma^2 . \end{aligned}$$

Если $\omega > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = \pm\frac{(16\xi+1)\sqrt{A_0}}{(8\xi+1)\sqrt{A_2}} .$$

При $\omega < 0$, $\quad \sigma(t) \;\to\; 0$ при $t \to \infty$.
Следовательно, Параметр Хаббла стремится к константе в любом случае.

Космологические следствия.

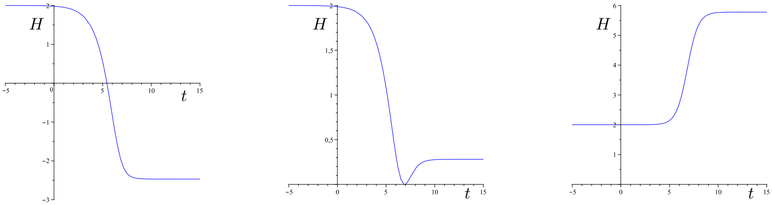

Рис. : **Функция** $H(t)$ **при** $A_1 = -6$, $A_1 = -4$, **and** $A_1 = 0$ **(слева направо). На всех графиках** $A_2 = 1$, $A_0 = 2$ **и** $c_2 = 100000$.

Одна и та же функция $\sigma(t)$ соответствует разному поведению параметра Хаббла.
При $A_1 = -4$ поведение $H(t)$ является немонотонным.

Заключение

- Рассмотрены космологические модели с неминимально взаимодействующим скалярным полем.
- Показано, что введением новых переменных можно свести уравнения Фридмана к уравнениям с минимально взаимодействующим скалярным полем и параметрическим временем.
- Метод суперпотенциала был использован для реконструкции потенциала. Построена модель с полиномиальным потенциалом и немонотонным поведением параметра Хаббла.