



А.Т.Дьяченко

НИЦ «Курчатовский Институт» - ПИЯФ, ПГУПС Императора Александра I, С.-Петербург, Россия

Уравнения квантовой релятивистской гидродинамики можно получить из уравнения Клейна–Фока–Гордона [1–3] по аналогии с представлением Маделунга [4] для временного уравнения Шредингера.

В 2026 г. квантовой механике и этим работам исполняется 100 Лет!

Уравнения квантовой релятивистской гидродинамики могут быть связаны с уравнением Клейна–Фока–Гордона. Для представления энергии E через импульс p и потенциальную энергию U частицы массы m имеем

$$(E - (U/mc^2)E)^2 = (p - (U/mc^2)p)^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1)$$

поскольку согласно известной формуле $\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}$, где \mathbf{v} – скорость частицы, \mathbf{p} – ее импульс, E – энергия. Здесь в (1) для формулы $E_0^2 = p_0^2 c^2 + m^2 c^4$ из энергии свободной частицы мы вычитаем потенциальную энергию U :

$$E_0 = \frac{mc^2 - U}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = E - U / (mc^2) E$$

с учетом движения со скоростью \mathbf{v} и аналогично отсчитываем импульс \mathbf{p} от импульса поля U . Выражение (1) для небольших U по сравнению с mc^2 переходит в выражение $E^2 = p^2 c^2 + 2mUc^2 + m^2 c^4$, использованное нами в предыдущей работе.

Соответствующее (1) уравнение Клейна–Гордона при переходе к операторам имеет вид

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^k \partial x_k} = \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \frac{1}{(1 - U/mc^2)^2} + \frac{2m}{\hbar^2} J \right) \Psi, \quad (2)$$

где $\Psi = \Phi \exp\left(\frac{iQ}{\hbar}\right)$ – волновая функция с амплитудой Φ и фазой Q , одинаковой для всех частиц как в приближении Томаса–Ферми, \hbar – постоянная Планка, c – скорость света. Здесь фаза $Q = (Et - \mathbf{p}\mathbf{r})$, x_0 и x_j – временная и пространственная координаты с предполагаемым суммированием по повторяющимся знакам.

Уравнение (2) – это эффективное одночастичное уравнение Клейна–Гордона для приближения Томаса–Ферми с эффективным потенциалом U .

Для теплового члена J должно быть получено дополнительное уравнение. Далее, следуя работе [5], используем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^k \partial x_k} = \Psi \left[\frac{\partial^2 \ln \Psi}{\partial x^k \partial x_k} + \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x^k} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k} \right], \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, 3$, и после подстановки (3) в (2) и последующего дифференцирования (2) с оператором $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ имеем аналог уравнения Эйлера и уравнение непрерывности.

$$\frac{\partial(\rho v_k (1 - (v/c)^2))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k v_j (1 - (v/c)^2))}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial(U_f + J)}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} c^2 \partial t^2} - \frac{\Delta \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho v_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5)$$

а также уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E v_j}{\partial x_j} = -\nabla^l (v_l P), \quad (6)$$

где $E = \frac{\rho m c^2 + e + P}{1 - (v/c)^2} - P$, $P = \frac{d(e/p)}{d(1/\rho)}$ с $e = e_{\text{kin}} + e_{\text{int}}$, $e_{\text{int}} = \int_0^{\rho} U_f d\rho$ и уравнение для функции распределения

$$\frac{df}{dt} = \frac{f_0 - f}{\tau}, \quad (7)$$

Здесь $U_f = mc^2 / (1 - U/mc^2)^2 - mc^2 / 2$, где $U_f \rightarrow U$ при $U \ll mc^2$

Таким образом, можно вместо уравнений квантовой релятивистской гидродинамики решать уравнение Клейна–Гордона с диссипацией согласно уравнениям (2), (6), (7). И получаются следующие результаты.

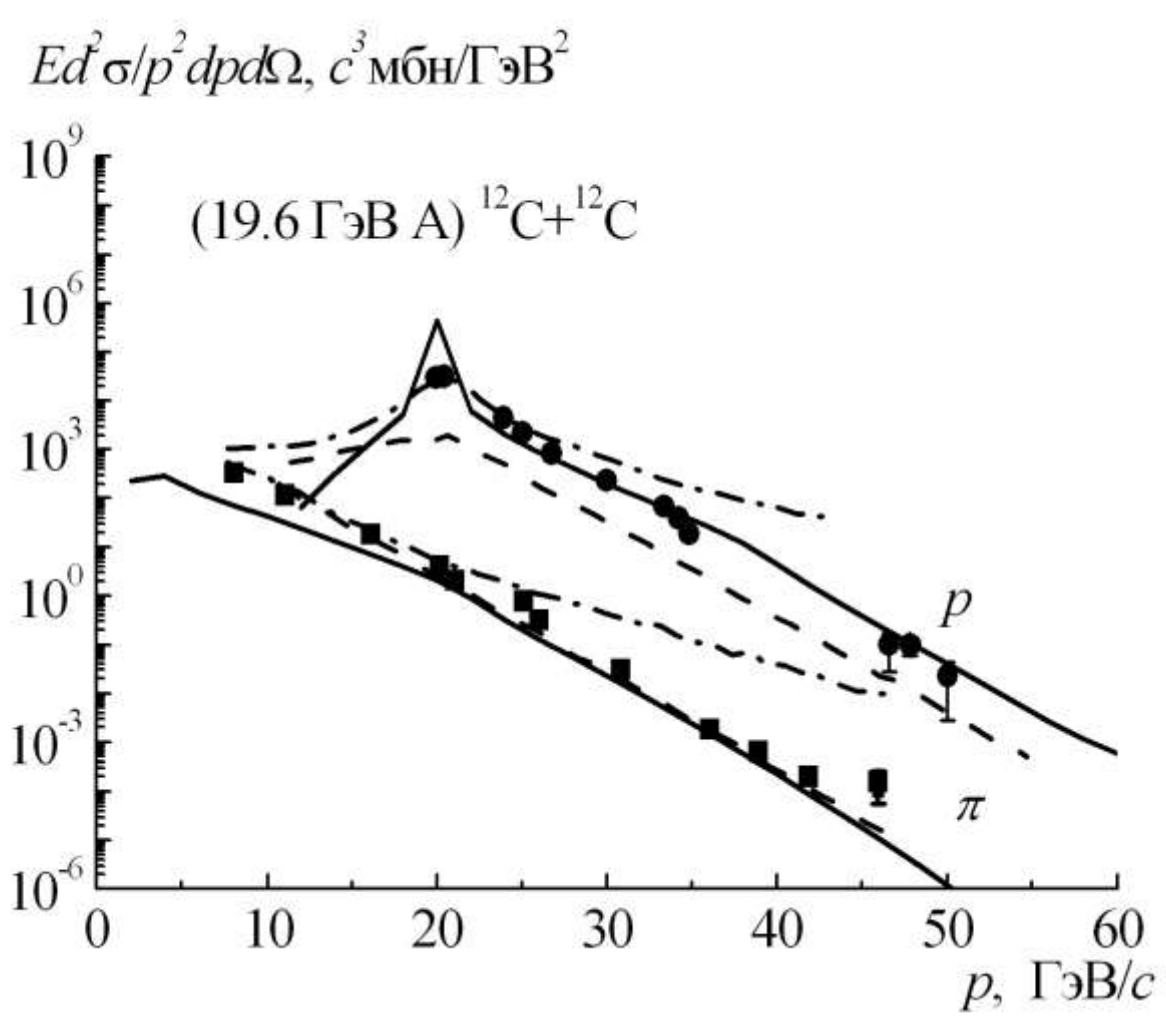
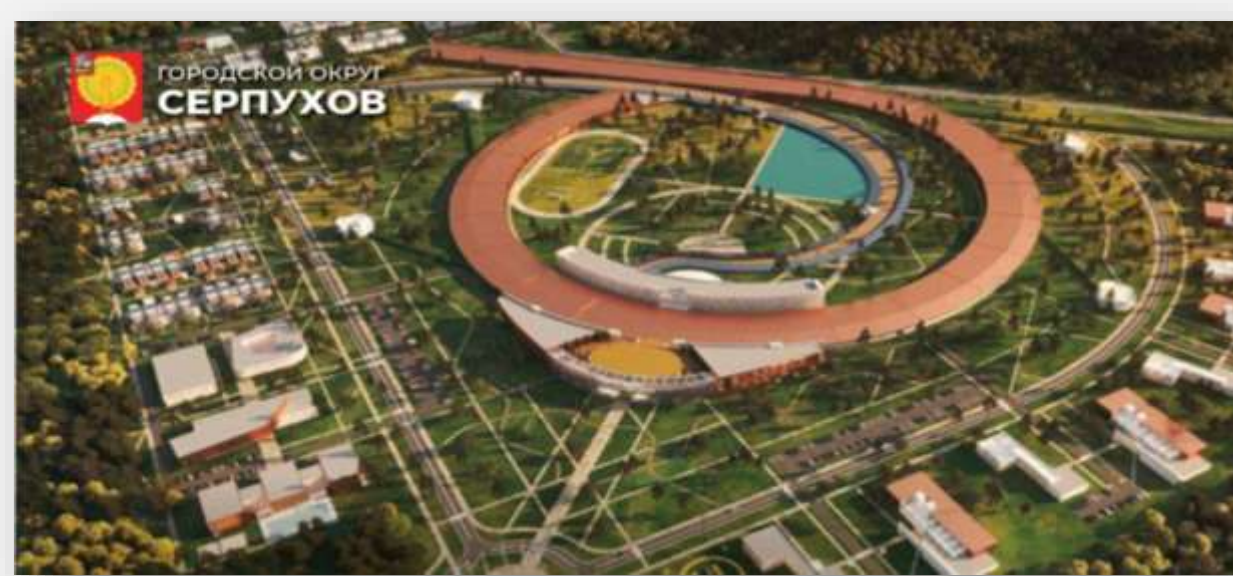


Рис. 1. Распределения протонов и π^- -мезонов по лабораторному импульсу в реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow \text{P} + \text{X}$, испускаемых под углом 0° при энергии ^{12}C 19.6 ГэВ/нуклон. Сплошные кривые – наш расчет с значениями $\langle T_h \rangle \approx 150$ МэВ, $\langle R_h \rangle \approx 2.5$ Фм; штриховые кривые – параметризация А.А. Балдина; точки – экспериментальные данные (кружки–протоны, квадраты–пионы). Штрихпунктирные кривые – результаты расчетов по модели FTFR.

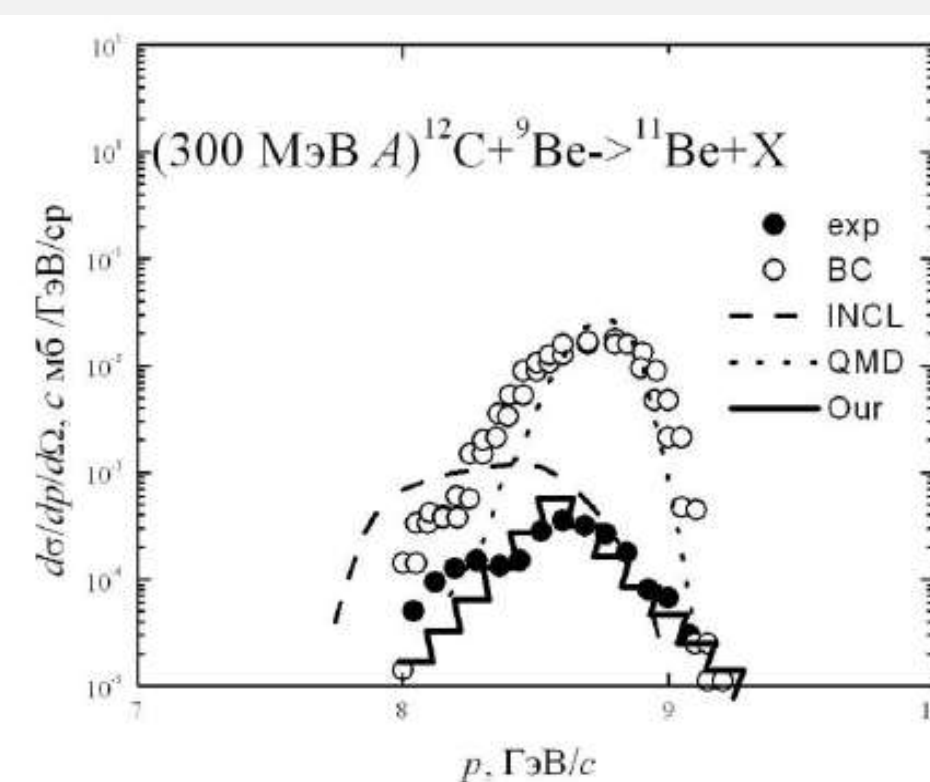


Рис. 3. Двойные дифференциальные сечения испускания ядер ^{11}Be под углом 3.5° в реакции $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be} + \text{X}$ при энергии 300 МэВ на нуклон для налетающих ядер ^{12}C . Сплошная линия – результаты нашего расчета по формуле (15) с учетом квантовых поправок, точки (сплошные кружки) – экспериментальные данные из работы. Результаты расчета из работы ИТЭФ изображены: светлыми кружками для модели BC, штрихпунктирной кривой для модели QMD и точечной кривой для модели INCL.

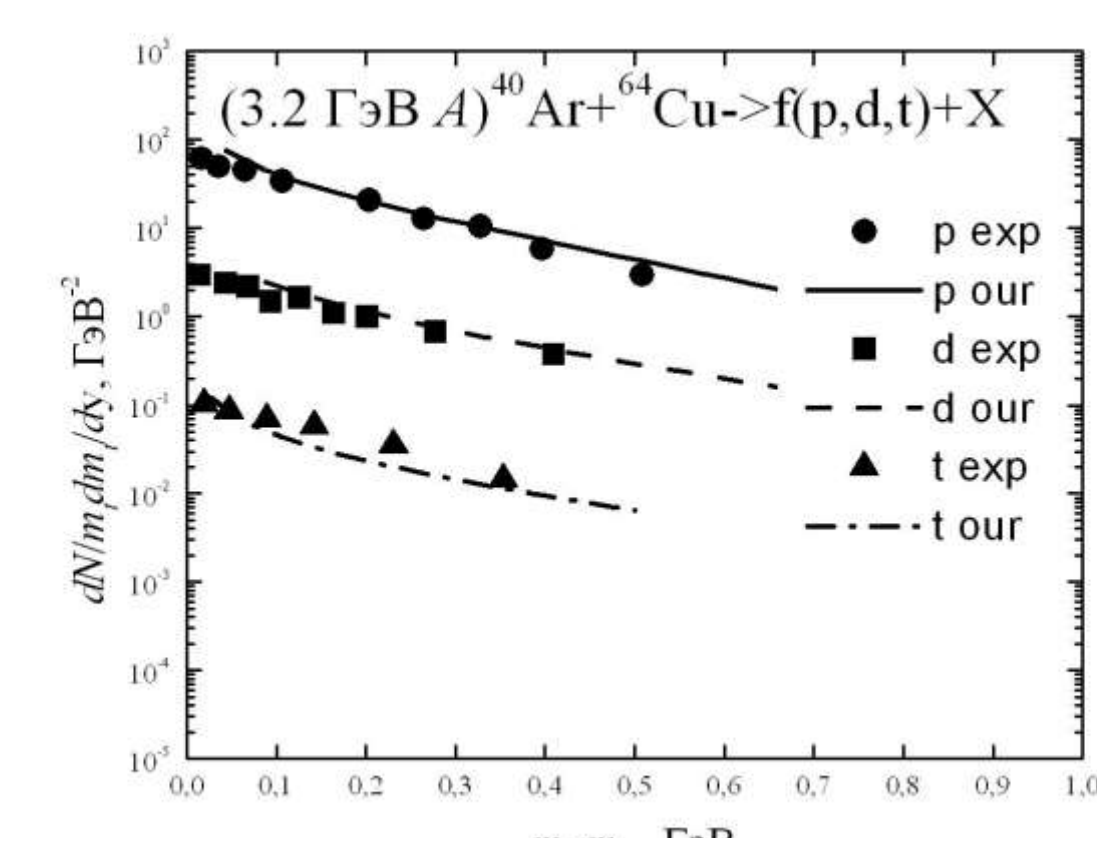


Рис. 4. Двойные дифференциальные распределения по скорости и поперечной массе протонов (сплошная линия), дейтронов (штриховая линия) и тритонов (штрихпунктирная линия) для столкновения ядер ^{40}Ar при энергии 3.2 ГэВ на нуклон с ядрами ^{64}Cu при быстройте $y=1.4$ для испускаемых фрагментов., точки – экспериментальные данные

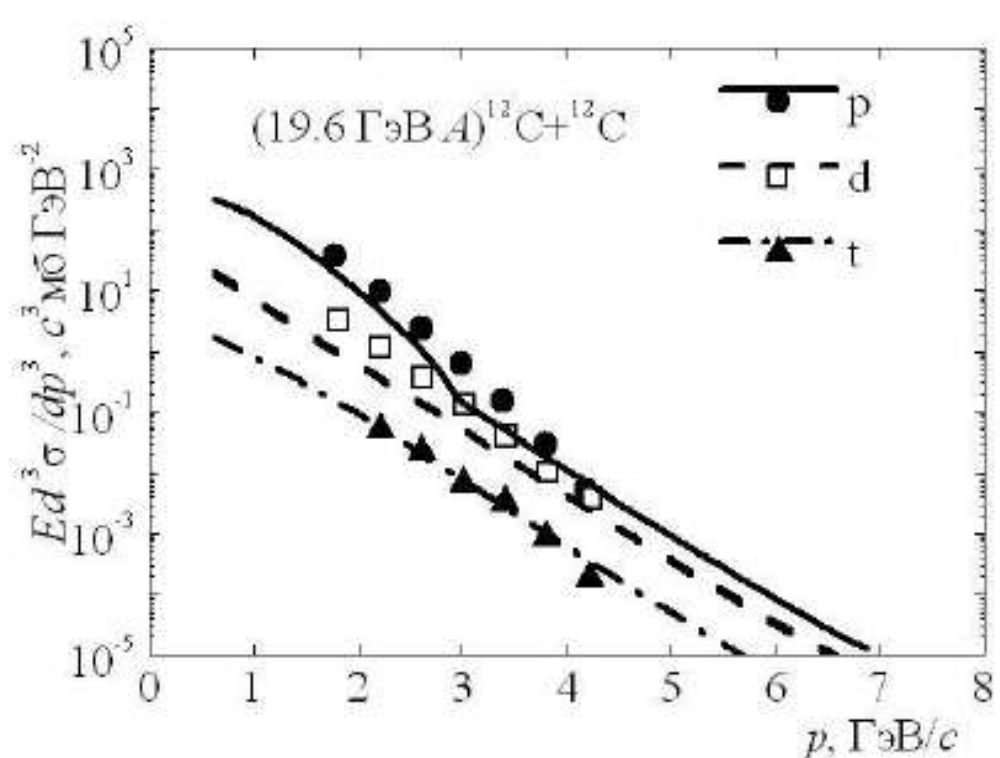


Рис. 2. Инвариантные двойные дифференциальные сечения испускания протонов, дейтронов и тритонов под углом 40° в реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow \text{f} + \text{X}$ при энергии 19.6 ГэВ на нуклон для налетающих ядер ^{12}C . Результаты расчетов (сплошная линия – протоны, штриховая линия – дейтроны, штрихпунктирная линия – тритоны), точки – экспериментальные данные и работы (сплошные кружки–протоны, светлые квадраты– дейтроны, сплошные треугольники – тритоны).

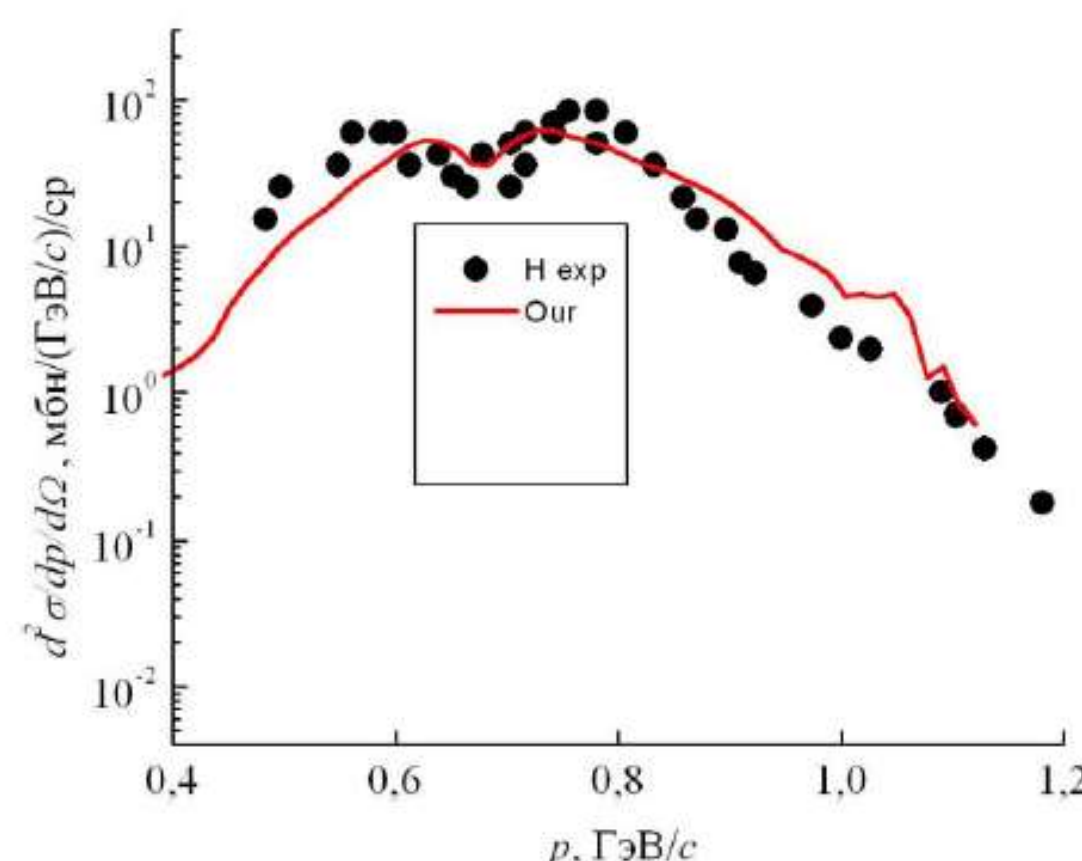


Рис. 5. Анализируя экспериментальные данные ИТЭФ в эксперименте ФРАГМ, получено объяснение эффекта распределения в импульсных спектрах протонов и легких фрагментов в реакции $(230 \text{ МэВ}/A) ^{56}\text{Fe} + ^9\text{Be} \rightarrow \text{f} + \text{X}$.

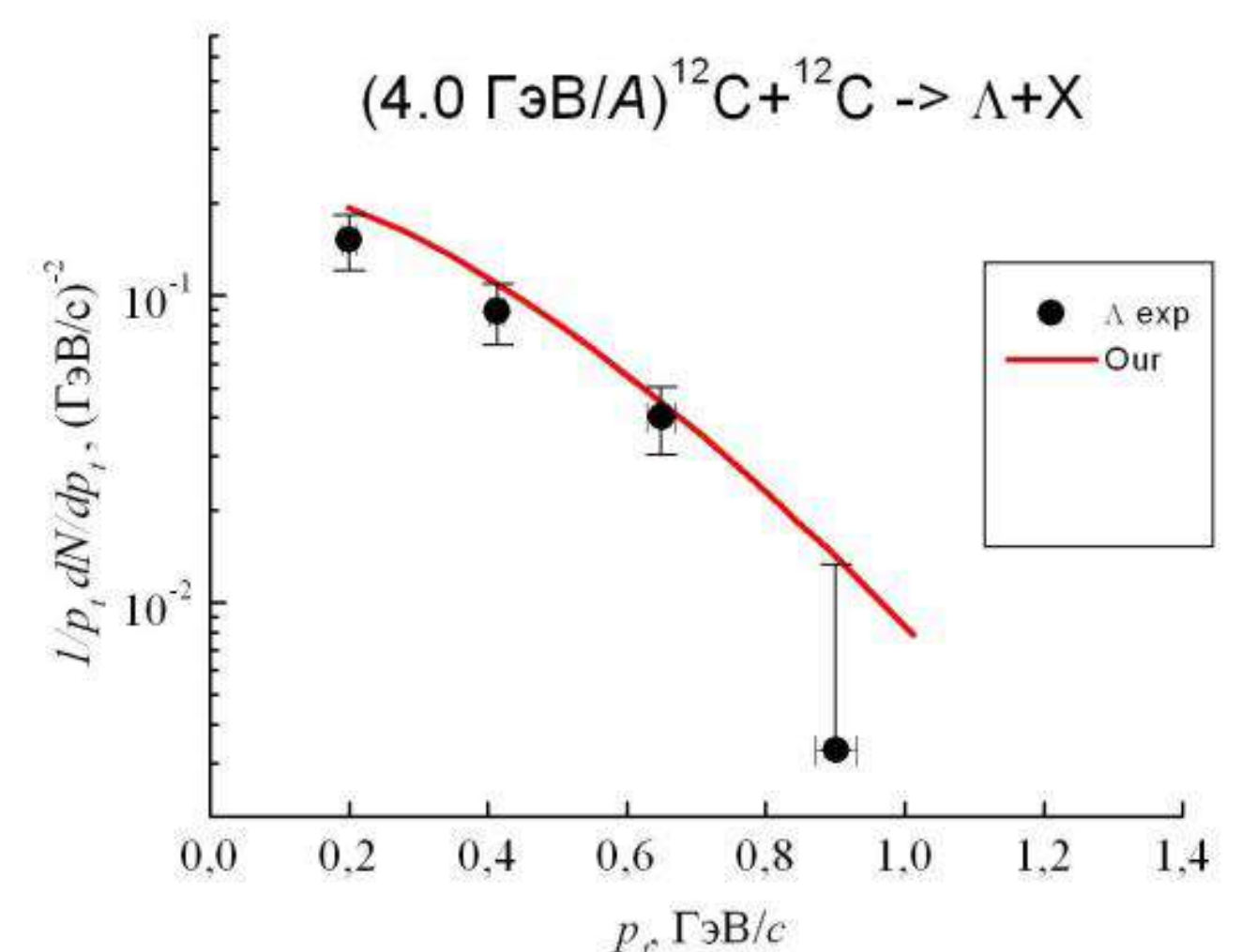


Рис. 6. Анализ экспериментальных данных ИТЭФ в эксперименте ФРАГМ, получено объяснение эффекта распределения в импульсных спектрах протонов и легких фрагментов в реакции $(230 \text{ МэВ}/A) ^{56}\text{Fe} + ^9\text{Be} \rightarrow \text{f} + \text{X}$.

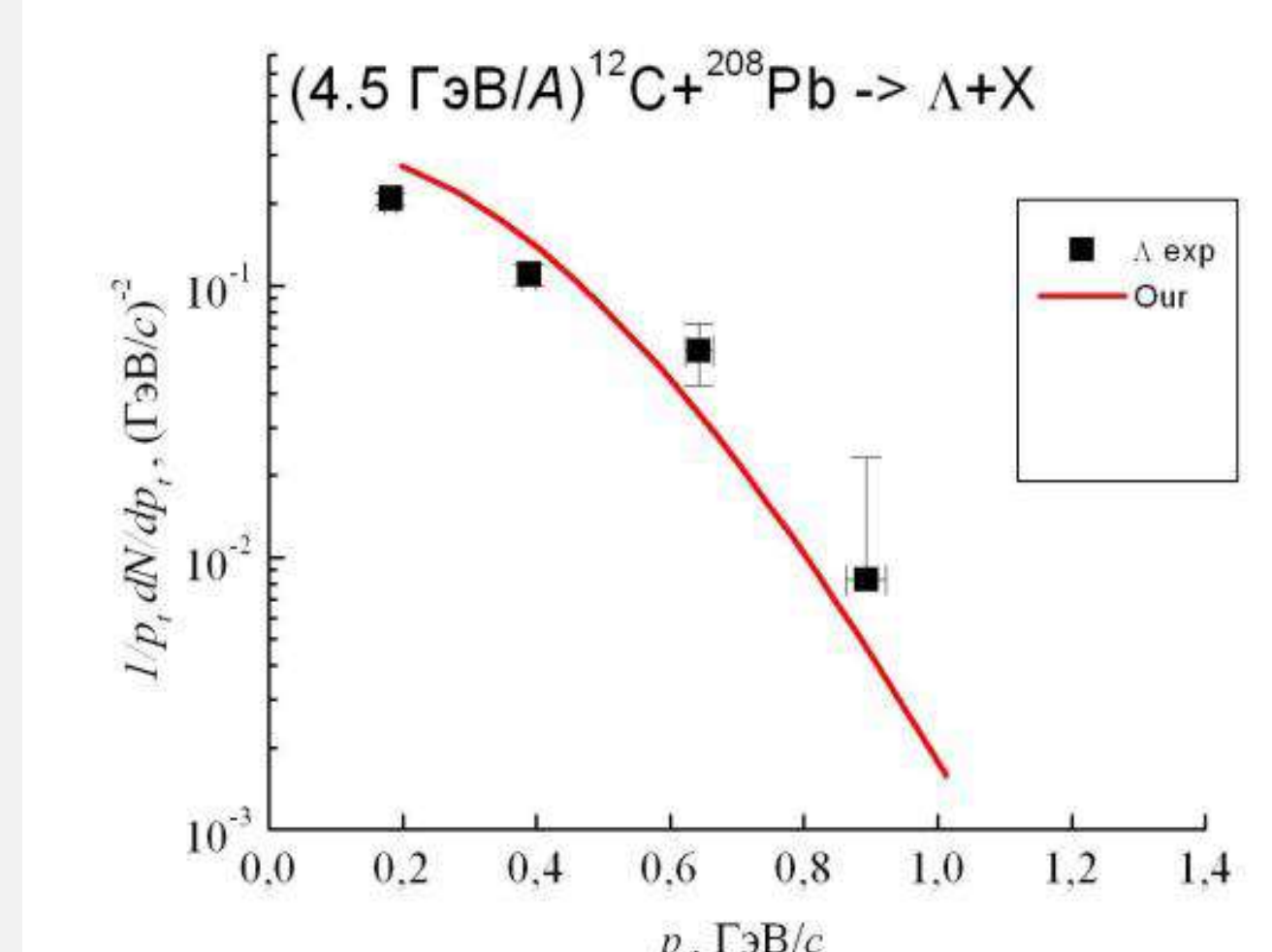


Рис. 6,7 В эксперименте BM@N коллаборации недавно были найдены дифференциальные распределения по поперечному импульсу и быстройте Λ -гиперонов в столкновениях ядер углерода на фиксированной мишени с различными ядрами при энергиях 4.0 и 4.5 ГэВ на нуклон, которые мы можем успешно описать в нашем подходе, наряду с пионами и каонами для столкновения ионов ^{40}Ar с различными ядрами при энергии 3.2 ГэВ на нуклон.

Список литературы

1. O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926).
2. V. Fock, Z. Phys. **38**, 242 (1926).
3. W. Gordon, Z. Phys. **40**, 117 (1926).
4. E. Madelung, Z. Phys. **40**, 332 (1926).
5. A.T.D'yachenko, Phys. At. Nucl. **87**, 646 (2024).
6. A.T. D'yachenko, I.A. Mitropolsky, Phys. At. Nucl. **85**, 1053 (2022).
7. A.T. D'yachenko, Phys. At. Nucl. **87**, 125 (2024).
8. B.M. Abramov et al. EPJ Web of Conferences **204**, 03008 (2019)
9. S. Afanasiev et al. BM@N Collaboration, arXiv:2604.13299v1 [hep-ex] 14 Apr 2026
10. S. Afanasiev et al. BM@N Collaboration, JHEP **07**, 174 (2023)4 [hep-ex/2303.16243].