

Взаимозависимость бозонной черной дыры с темной материей и объяснение асимптотически плоских кривых вращения галактик

Б. Э. Мейерович

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы

3 ноября 2023 г.

Продольное векторное поле

Тёмная материя даёт о себе знать только за счёт гравитационного взаимодействия. Кванты обычной материи в плоском пространстве описываются векторными полями. Предположим, что волновая функция квантов тёмной материи тоже является векторным полем φ_m . Тогда имеет смысл найти такое векторное поле в общей теории относительности (ОТО), которое проявляется исключительно в кривом пространстве.

В рамках минимальной общей теории относительности (уравнения поля не выше второго порядка) лагранжиан L векторного поля φ_m – это скаляр, состоящий из свёртки билинейных комбинаций ковариантных производных $\varphi_{i;k}$ и скалярного потенциала $V(\varphi^k \varphi_k)$. Билинейная комбинация ковариантных производных – это тензор

$$S_{iklm} = \varphi_{i;k} \varphi_{l;m}.$$

Общая форма лагранжиана L , образованного свёрткой S_{iklm} , имеет вид

$$L = a(\varphi_{;m}^m)^2 + b\varphi_{;m}^l \varphi_l^m + c\varphi_{;m}^l \varphi_{;l}^m - V(\varphi_m \varphi^m).$$

a , b , и c – произвольные константы. В ОТО вторая производная вектора не инвариантна относительно замены порядка дифференцирования:

$$\varphi_{;l;m}^l - \varphi_{;m;l}^l = R_{km} \varphi^k.$$

R_{km} – это тензор Риччи. В кривом пространстве все три кинетических члена в лагранжиане L равнозначны.

Ковариантную производную $\varphi_{i;k}$ можно представить в виде суммы симметричной G_{ik} и антисимметричной F_{ik} частей: $\varphi_{i;k} = G_{ik} + F_{ik}$, $G_{ik} = \frac{1}{2}(\varphi_{i;k} + \varphi_{k;i})$, $F_{ik} = \frac{1}{2}(\varphi_{i;k} - \varphi_{k;i})$.

Скаляр S может быть представлен в виде

$$S = a(G_k^k)^2 + (b+c)G_k^i G_i^k + (b-c)F_k^i F_i^k.$$

В плоском пространстве $R_{km} = 0$, и фактически независимыми являются только два кинетических члена из трёх. Применительно к обычной материи в плоском пространстве эта градиентная (калибровочная) инвариантность позволяет положить $a = 0$. Тогда ковариантная дивергенция $\varphi_{;m}^m$ становится произвольной функцией, не влияющей на действие. В электродинамике $\varphi_{;m}^m = 0$ называется калибровкой Лоренца.

Если положить $b = c = 0$, то при $a \neq 0$ мы получаем лагранжиан

$$L = a(\varphi_{;m}^m)^2 - V(\varphi_m \varphi^m)$$

продольного векторного поля, которое в виду калибровочной инвариантности не влияет на обычную материю в плоском пространстве. Оказывается, что в кривом пространстве-времени продольное векторное поле φ_m адекватно описывает наблюдаемые свойства тёмной материи. Из уравнения Эйлера-Лагранжа следует волновое уравнение

$$a\varphi_{;m,k}^m = -V'\varphi_k, \quad V' = \frac{dV}{d(\varphi_m \varphi^m)}.$$

В масштабах галактики гравитационное взаимодействие является доминирующим. В разложении потенциала

$$V(\varphi_m \varphi^m) = V_0 + V'(0)\varphi_m \varphi^m + \lambda(\varphi_m \varphi^m)^2 + \dots \quad - \frac{V'(0)}{a} = \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 \equiv \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)^2$$

первый член V_0 – это добавка к космологической постоянной, влияющей на расширение Вселенной. В масштабе галактики роль V_0 ничтожна. Второй член разложения $V'(0)\varphi_m \varphi^m$ – это основной источник гравитационного взаимодействия. μ – это масса покоя кванта продольного векторного поля. Третий член $\lambda(\varphi_m \varphi^m)^2$ – это поправка на взаимодействие негравитационной природы (включая упругость материи). Не надо путать коэффициент λ в третьем члене $\lambda(\varphi_m \varphi^m)^2$ с метрической функцией $\lambda(r) = \ln g_{rr}$ и с длиной волны Де Бройля $\tilde{\lambda} = \hbar/\mu c$. Ограничиваясь только членом $V'(0)\varphi_m \varphi^m$, мы рассматриваем гравитирующую тёмную материю как идеальный газ. Масса кванта продольного векторного поля обозначена μ , чтобы в дальнейшем не путать с массой m кванта бозонного скалярного поля чёрной дыры.

В пространстве-времени со статической центрально-симметричной метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^{\nu(r)} (dx^0)^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

тензор энергии-импульса $T_{dark\ i}^k$ продольного векторного поля φ_m :

$$T_{dark\ i}^k = \delta_i^k \begin{cases} a(\varphi_{;m}^m)^2 - V_0' e^{\lambda} (\varphi^r)^2, & i = r, \\ a(\varphi_{;m}^m)^2 + V_0' e^{\lambda} (\varphi^r)^2, & i \neq r. \end{cases}$$

Гравитационные свойства продольного векторного поля описываются уравнениями Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{dark\ ik}.$$

По наблюдаемым кривым вращения галактик длина волны Де Бройля $\tilde{\lambda} = \hbar/\mu c$ продольного векторного поля φ_m порядка пятнадцати килопарсек. Это на много порядков превышает размер чёрной дыры. Радиус поверхности чёрной дыры r_h в нашей галактике Млечный Путь меньше 0.0002 светового года. Поэтому ковариантная дивергенция продольного поля $\varphi_{;m}^m(r_h)$ практически неотличима от $\varphi_{;m}^m(0)$. В асимптотической области $r \sim \tilde{\lambda} \gg r_h$ метрическая функция $\lambda(r) \ll 1$. Линеаризованные уравнения Эйнштейна для метрических функций $\nu(r)$, $\lambda(r)$

$$\nu' = \kappa r \left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} \varphi^r\right)^2 + (\varphi_{;m}^m)^2 \right] + \frac{\lambda}{r}, \quad \lambda' + \frac{\lambda}{r} = \kappa r \left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} \varphi^r\right)^2 - (\varphi_{;m}^m)^2 \right]$$

вместе с уравнением Клейна-Гордона для ковариантной дивергенции $\varphi_{;m}^m(r)$ продольного векторного поля

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi_{;m}^m}{dr} + \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \varphi_{;m}^m = 0$$

позволяют найти зависимость от радиуса скорости вращения звезды вокруг центра $V(r)$ в асимптотической области $r \gg r_h$.

Регулярное в центре решение уравнения Клейна-Гордона имеет вид

$$\varphi_{;m}^m(r) = \varphi_{;m}^m(0) \frac{\tilde{\lambda}}{r} \sin\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right).$$

Из волнового уравнения $\varphi_{;m,k}^m = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \varphi_k$ получаем

$$\varphi^r(r) = -\varphi_{;m}^m(0) \frac{\tilde{\lambda}^3}{r^2} \left[\sin\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right) - \frac{r}{\tilde{\lambda}} \cos\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right) \right].$$

Подстановкой $\varphi^r(r)$ и $\varphi_{;m}^m(r)$ в линеаризованные уравнения Эйнштейна ($\nu' = \dots$ и $\lambda' = \dots$) находим:

$$r \frac{d\nu}{dr} = \kappa (\varphi_{;m}^m(0))^2 \tilde{\lambda}^2 \left[1 - \frac{\tilde{\lambda}}{r} \sin\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} r\right) + \left(\frac{\tilde{\lambda}}{r}\right)^2 \sin^2\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right) \right] + \lambda,$$

$$\lambda(r) = \kappa (\varphi_{;m}^m(0))^2 \tilde{\lambda}^2 \left[\frac{\tilde{\lambda}}{2r} \sin\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} r\right) - \left(\frac{\tilde{\lambda}}{r}\right)^2 \sin^2\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right) \right].$$

При выводе $\lambda(r)$ использовано тождество

$$\left(\frac{\sin(ar)}{ar} \right)^2 - \frac{\sin(2ar)}{ar} + \cos(2ar) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\sin(2ar)}{2a} - \frac{\sin^2(ar)}{a^2 r} \right).$$

При вращении звезды вокруг центра галактики центростремительное ускорение $\frac{c^2}{2} \frac{d\nu}{dr}$ уравновешено центробежным $\frac{V^2}{r}$. Скорость движения звёзды $V(r)$ как функция радиуса r асимптотически выходит на плато с затухающими осцилляциями:

$$V(r) = c \sqrt{\frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr}} = V_{plat} \sqrt{1 - \frac{\tilde{\lambda}}{2r} \sin\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} r\right)}, \quad r \gg r_h.$$

График функции $\sqrt{1 - \frac{\sin 2x}{2x}}$ показан на Рисунке 1:

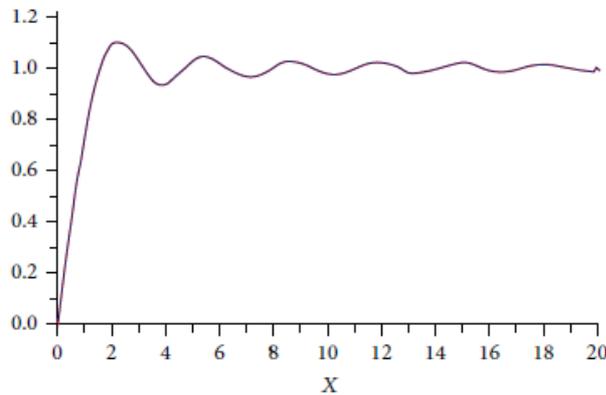


Рисунок 1

Скорость на плато $V_{plat} = c \sqrt{\frac{\kappa}{2} \tilde{\lambda} \varphi_{;m}^m(r_h)}$ пропорциональна ковариантной дивергенции $\varphi_{;m}^m(r_h)$, неотличимой от дивергенции поля в центре $\varphi_{;m}^m(0)$ при $\tilde{\lambda} \gg r_h$. Для каждой конкретной галактики значение $\varphi_{;m}^m(r_h)$ зависит от взаимодействия продольного векторного поля $\varphi^r(r)$ с чёрной дырой находящейся в центре галактики.

О статическом состоянии чёрной дыры в центре галактики

Здесь нужно отметить важнейшую роль тёмного сектора. В вакууме (без стабилизирующего действия тёмной материи) равновесное состояние сверхтяжёлой чёрной дыры невозможно. Согласно «нарезке пирога» в диаграмме НАСА (рисунок 2), обычной материи в составе Вселенной всего лишь 4,6%.

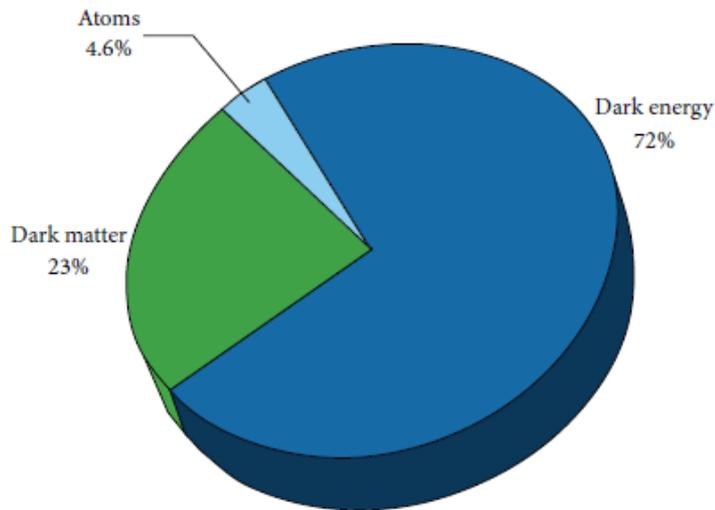


Рисунок 2. Состав Вселенной

Остальные 95% это так называемые темная материя 23% и темная энергия 72%.

Считается, что чёрная дыра – это процесс неограниченного сжатия (коллапс) материи под действием доминирующей силы собственного гравитационного поля. Галактики с чёрными дырами в центре существуют столь же долго, что и Вселенная. При такой медленной эволюции чёрной дыры локально равновесная концентрация частиц, вступающих в химические реакции превращения одних в другие, зависит от температуры и давления, и не зависит от конкретных каналов реакции. Чтобы установить связь тёмной материи с чёрной дырой, нужно показать, что существует равновесное состояние, к которому может привести гравитационный коллапс.

В процессе коллапса с ростом давления на следующем шаге после нейтронов доминирующими могут стать элементарные частицы Стандартной Модели (рисунок 3):

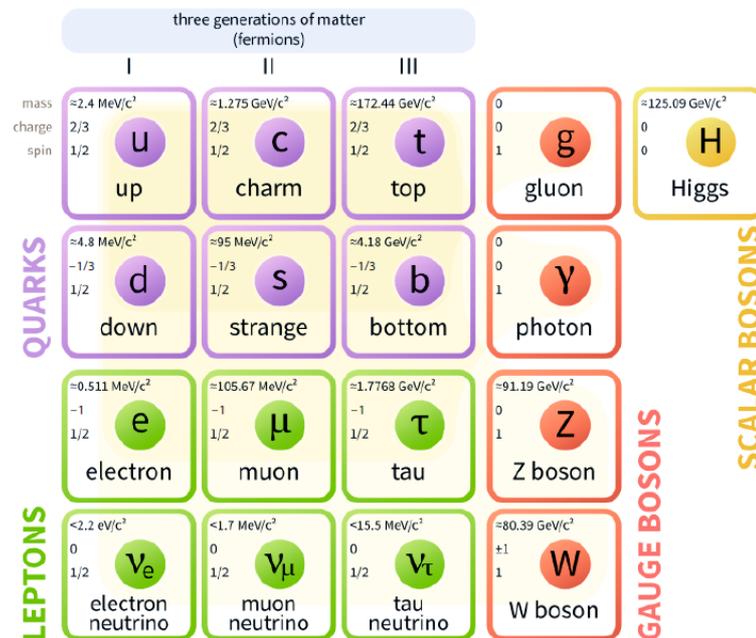


Рисунок 3. Стандартная Модель Элементарных Частиц

Энергетически наиболее выгодным состоянием материи при низкой температуре является конденсат Бозе-Эйнштейна массивных бозонов. Это могут быть калибровочные бозоны Z и W, скалярный бозон Хиггса H, а также бозонные квазичастицы спаренных фермионов (эффект Купера [1]).

Волновой функцией конденсата Бозе-Эйнштейна является скалярное поле. Лагранжиан комплексного скалярного поля ψ

$$L = g^{ik} \psi_{,i}^* \psi_{,k} - U(|\psi|^2), \quad U(0) = 0.$$

В разложении потенциала

$$U(|\psi|^2) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^4 + \dots$$

m это масса покоя бозона. Скалярные функции ψ и ψ^* удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона:

$$\frac{1}{\sqrt{\det g_{ik}}} \left(\sqrt{\det g_{ik}} g^{lm} \psi_{,l} \right)_{,m} = - \frac{\partial U}{\partial |\psi|^2} \psi.$$

Это уравнение инвариантно относительно изменения знака $\det g_{ik} : \sqrt{-1}$ в числителе и знаменателе сокращаются. Статическое сферически-симметричное скалярное поле в состоянии с определенной энергией E на частицу

$$\psi_E(x^i) = e^{-iEx^0/\hbar c} \psi(r)$$

формально зависит от двух координат x^0 и r . Но в статике в уравнениях Клейна-Гордона

$$g^{rr} \psi'' + \left((g^{rr})' + \frac{1}{2} (\ln(\det g_{ik}))' g^{rr} \right) \psi' = \left(\frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 - m^2 c^4) - \lambda |\psi|^2 \right) \psi$$

и Эйнштейна

$$\begin{aligned} (g^{rr})' + \frac{1+g^{rr}}{r} &= \kappa r T_0^0, \\ g^{rr} \left(\frac{1}{r} - (\ln g^{00})' \right) + \frac{1}{r} &= \kappa r T_r^r \end{aligned}$$

время x^0 является циклической переменной. Координата x^0 не входит явно в компоненты T_0^0 и T_r^r тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{1}{\hbar^2 c^2} (g^{00} E^2 + m^2 c^4) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^4 - g^{rr} |\psi'|^2, \\ T_r^r &= \frac{1}{\hbar^2 c^2} (-g^{00} E^2 + m^2 c^4) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^4 + g^{rr} |\psi'|^2. \end{aligned}$$

Три уравнения (одно Клейна-Гордона и два Эйнштейна) для трёх функций $\psi(r)$, $g^{00}(r)$ и $g^{rr}(r)$ определяют статическое состояние гравитирующего конденсата Бозе-Эйнштейна.

Метрическая компонента $g^{rr}(r)$ является коэффициентом при старшей производной уравнения Клейна-Гордона. С точки зрения теоремы существования и единственности на гравитационных радиусах $r = r_g$ и $r = r_h > r_g$ (на которых в метрике Шварцшильда $g^{rr}(r) = 0$) решение $\psi(r)$ существует, но не является единственным. При сколь угодно большой массе чёрной дыры наличие внутреннего гравитационного радиуса r_g обеспечивает существование статического решения, регулярного в центре. Сфера с гравитационным радиусом r_h это граница чёрной дыры с тёмной материей. Неединственность решений с граничными условиями на гравитационных радиусах r_g и r_h подтверждает возможность существования регулярного статического состояния массивной черной дыры в ореоле тёмной материи.

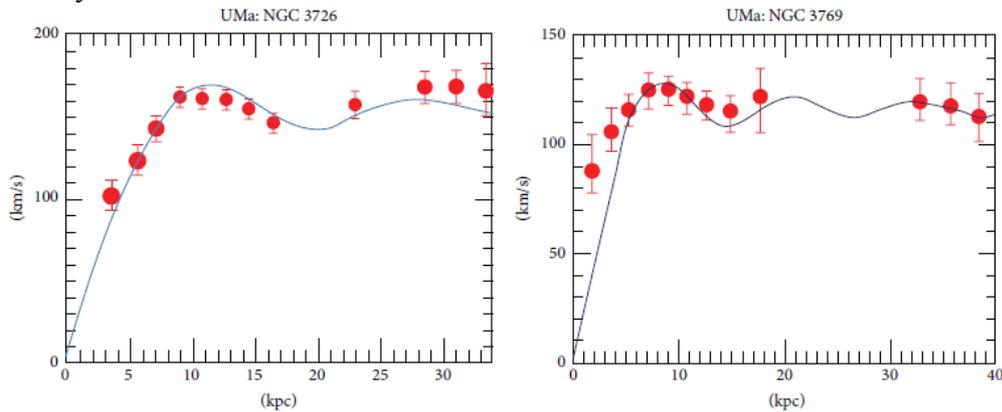
Из уравнений Эйнштейна следует, что на границе $r = r_h$ компоненты тензора энергии-импульса $T_0^0(r_h) = 0$ и $T_r^r(r_h) = 1/\kappa r_h^2$. Ковариантная дивергенция векторного поля – это скаляр, удовлетворяющий уравнению Клейна-Гордона. Скалярная волновая функция бозе-конденсата тоже удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона, но только с другой массой кванта. Можно пошутить, что дивергенция продольного поля тёмной материи в

области $r > r_h$ – это волновая функция бозе-конденсата внутри чёрной дыры $r < r_h$, «вывернутая наизнанку». Условие непрерывности давления на границе раздела позволяет определить зависимость скорости на плато вращения галактики от массы чёрной дыры:

$$V_{plat} = c \frac{M_{Pl}^2}{4\sqrt{\mu t M}}.$$

Здесь $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c / k} = 2,177 \times 10^{-5} \text{ г}$ – масса Планка, M – масса чёрной дыры, μ и t – это массы покоя квантов продольного векторного поля тёмной материи и бозонов волновой функции конденсата чёрной дыры. Гравитационная постоянная $k = 6.67 \times 10^{-8} \text{ см}^3 / \text{г} \times \text{сек}^2$.

На Рисунках 4



Рисунки 4.

показаны кривые вращения двух спиральных галактик (№3726 и №3769) в скоплении Большой Медведицы (UMa это Ursa Major cluster). Аббревиатура NGC означает «Новый общий каталог туманностей и скоплений звезд». Вертикальная ось – это скорость V в км/сек, а горизонтальная ось – расстояние r от центра галактики в килопарсеках. Точки с интервалами ошибок – это наблюдения. Сплошные кривые – аппроксимации по формуле

$$V(r) = c \frac{M_{Pl}^2}{4\sqrt{\mu t M}} \sqrt{1 - \frac{\tilde{\lambda}}{2r} \sin\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} r\right)}.$$

У галактики №3726 (на левом рисунке) скорость на плато $V \approx 150 \text{ км/сек}$ и длина волны Де Бройля $\tilde{\lambda} \approx 16 \text{ крс}$. Масса покоя кванта тёмной материи этой галактики

$\mu = \hbar / c\tilde{\lambda} \approx 0.76 \times 10^{-60} \text{ г}$. У галактики №3769 на правом Рисунке 4 скорость на плато $V \approx 120 \text{ км/сек}$ и длина волны $\tilde{\lambda} \approx 13 \text{ крс}$. Энергия покоя массивных бозонов Стандартной

Модели Элементарных Частиц в районе 100 Гэв. Для количественных оценок будем считать, что масса покоя бозонов чёрной дыры $t \approx 1.78 \times 10^{-22} \text{ г}$. Получается, что массы чёрных дыр в центрах этих галактик $M_{3726} \approx 2 \times 10^{34} \text{ г}$ и $M_{3769} \approx 2.3 \times 10^{34} \text{ г}$. Точность оценки масс этих двух чёрных дыр невелика покуда не ясно, какие именно бозоны составляют конденсат Бозе-Эйнштейна.

Гравитационное поле чёрной дыры в ореоле тёмной материи

Вне чёрной дыры $r > r_h$ уравнение Эйнштейна

$$\lambda' + \frac{\lambda}{r} = \kappa r \left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} \varphi^r \right)^2 - (\varphi_{;m}^m)^2 \right]$$

– это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение. Его полное решение состоит из суммы общего решения однородного уравнения и специального решения неоднородного уравнения. Специальное решение неоднородного уравнения

$$\lambda(r) = 2 \frac{V_{plat}^2}{c^2} \left[\frac{\tilde{\lambda}}{2r} \sin\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} r\right) - \left(\frac{\tilde{\lambda}}{r}\right)^2 \sin^2\left(\frac{r}{\tilde{\lambda}}\right) \right], \quad r > r_h$$

– это вклад тёмной материи в гравитацию. Общим решением однородного уравнения $\lambda' + \frac{\lambda}{r} = 0$ в нашем случае является решение Шварцшильда $\lambda(r) = r_h / r$. Это вклад чёрной дыры в гравитационное поле в области $r > r_h$, занятой темной материей.

Зависимость скорости звезды

$$V(r) = \sqrt{V_{plat}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}}{2r} \sin\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} r\right) \right) + c^2 \frac{r_h}{2r}}$$

от массы M чёрной дыры, находящейся в центре галактики, проявляется двояко.

Посредством тёмной материи скорость на плато $V_{plat} = c \frac{M_{Pl}^2}{4\sqrt{\mu m M}}$ убывает с ростом массы

чёрной дыры $\sim M^{-1}$. И просто из-за притяжения к чёрной дыре (в виду $r_h = \frac{2kM}{c^2}$) скорость

звезды $V(r)$ увеличивается с ростом массы $\sim \sqrt{M}$. На расстояниях от центра $r \sim \tilde{\lambda}$ вклады в гравитацию непосредственно от чёрной дыры и посредством тёмной материи одного порядка при массе чёрной дыры

$$M \sim \tilde{M} \equiv \frac{M_{Pl}^2}{(16t\mu^2)^{1/3}}.$$

При $M \gg \tilde{M}$ скорость звезды $V(r)$ убывает пропорционально $1/\sqrt{r}$, как по теории Ньютона.

И наоборот, при массе чёрной дыры $M \ll \tilde{M}$ кривая вращения звёзд галактики $V(r)$ выходит на плато. С энергией покоя бозонов ~ 100 Гэв конденсата Бозе-Эйнштейна (с массой $t \approx 1.78 \times 10^{-22} \text{ г}$) и с массой квантов $\mu = \hbar / c\tilde{\lambda} \approx 0.76 \times 10^{-60} \text{ г}$ продольного векторного поля получаем $\tilde{M} \approx 4 \times 10^{37} \text{ г}$.

На рисунке 5

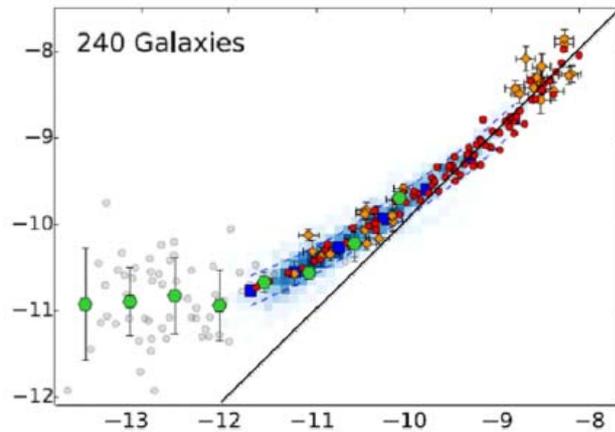


Рисунок 5

представлено сравнение наблюдаемого (вертикальная ось) центростремительного ускорения с Ньютонским (горизонтальная ось) у 240 различных галактик. Без тёмной материи все точки лежали бы на прямой линии под углом 45 градусов от осей. Для звёзд разных галактик, движущихся по окружности одного и того же радиуса, ускорения пропорциональны массам чёрных дыр в центрах своих галактик. Поэтому фактически по осям отложены логарифмы масс чёрных дыр.

Массы спиральных галактик NGC3726 и NGC3769 созвездия Большой Медведицы $M_{3726} \approx 2 \times 10^{34} \text{ г}$ и $M_{3769} \approx 2.3 \times 10^{34} \text{ г}$ на много меньше, чем $\tilde{M} \approx 4 \times 10^{37} \text{ г}$. Их место внизу

в левой стороне Рисунка 5. Масса чёрной дыры в центре нашей галактики «Млечный Путь» $M_{MH} = 8.6 \times 10^{39} \varepsilon$ на два порядка превышает \tilde{M} . Тёмная материя не играет существенной роли в галактике «Млечный Путь». Среди 240 галактик на Рисунке 5 место нашего Млечного Пути находится наверху справа.

Подробности Вы найдёте в моих статьях:

1. Vector fields in multidimensional cosmology. *Phys. Rev.* **D84**, 064037 (2011) arXiv:1105.4420
2. Vector fields in multidimensional cosmology. Proceedings of PIRT-2011 Moscow, p.211, (2012)
3. Towards the theory of evolution of the Universe. *Phys. Rev.* **D85**, 123544 (2012) arXiv:1201.2562
4. Galaxy rotation curves driven by massive vector fields: Key to the theory of dark sector. *Phys. Rev.* **D87**, 103510 (2013) arXiv:1303.7062
5. Macroscopic theory of dark sector. Physical Interpretation of Relativity Theory Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2013. Moscow: 1-4 July, 2013. p440. Bauman Moscow State Technical University (2013)
6. [Macroscopic theory of dark sector](#). *Journ. of Gravity* **2014**, 586958 (2014)
7. Phenomenological description of dark energy and dark matter by vector fields. Physical Interpretation of Relativity Theory. Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2015. Moscow: 29 June - 02 July, 2015. p 384. Bauman Moscow State Technical University (2015)
8. Description of dark energy and dark matter by vector fields. Proceedings of the Tenth Asia-Pacific International Conference on Gravitation, Astrophysics, and Cosmology. Dedicated to the Centenary of Einstein's General Relativity. p 135 (2016) World Scientific Publishing Co.
9. Motion in a Central Field with Account of Dark Matter. *Gravitation and Cosmology* **23**(3), 251 (2017)
10. [О равновесном состоянии гравитирующего конденсата Бозе-Эйнштейна](#) *ЖЭТФ* **154**(5), 1000 (2018)
11. [Static State of a Black Hole Supported by Dark Matter](#). *Universe* **5**(9), 198 (2019)
12. [Black hole in balance with dark matter](#). *International Journal of Modern Physics A35*, (2&3), 2040050 (2020)
13. [Black Hole and Dark Matter. Phase Equilibrium](#). *J. Phys. CS* **1557**, 012030 (2020)
14. [Guessing the Riddle of a Black Hole](#). *Universe* **6**(8), 113 (2020)
15. [Gravitational Radius in view of Existence and Uniqueness Theorem](#). *J. Phys. CS* **2081**, 012026 (2021)
16. [Bose-Einstein Condensate in Synchronous Coordinates](#). *Phys. Sci. Forum* **7**, 47 (2023)
17. [Чёрная дыра и темная материя в синхронной системе координат](#). *ЖЭТФ* **163**(5), 660 (2023)
18. О гравитационном поле чёрной дыры в синхронной системе координат В книге: Физические интерпретации теории относительности (PIRT-2023) Сборник тезисов XXIII Международной научной конференции Москва, С. 115 (2023)