Винтовое исчисление: от машиностроения до твисторов

Р. Н. Рогалёв[a,1]

[a] НИЦ "Курчатовский институт" - ИФВЭ, Протвино, Московская обл., 142281 Россия

В краткой заметке обзорного характера излагается развитие концепции винтов, оказавшей в конечном счёте влияние на создание твисторного исчисления.

In a short review the dvelopment of the concept of the screw is oulined and its impact on the creation of the twistor calculus is emphasized.

PACS: 03.30.+p; 45.40.−f; 45.20.D−; 01.65.+g

1. Введение

Развитие техники в 19 веке мотивировало развитие статики и вычислительной кинематики. Проблема сложения сил, действующих вдоль скрещивающихся прямых, привела к появлению концепций скользящих векторов и винтов и пониманию силы как винта, а описание множества сил, действующих на твёрдое тело - к концепции грассманова многообразия. Анализ на грассмановых многообразиях столетием позже послужил основой для создания твисторного исчисления, поскольку была выявлена возможность интерпретации комплексифицированного пространства Минковского как грссманова многообразия в 4-мерном линейном пространстве над полем комплексных чисел (твисторным пространством). Твисторная техника успешно использовалась для классификации инстантонов в теории Янга-Миллса и для нахождения некоторых решений уравнений Эйнштейна.

Математические конструкции, использованные в этой линии развития физики, не получили должного внимания в образовательных программах. В данной заметке сделана попытка дать простое и наглядное описание винтов и грассмановых многообразий. Подчёркивается "инженерное" происхождение упомянутых математических объектов, имеющих репутацию сложных и абстрактных.

2. Задача о сложении сил и скользящие векторы

Концепция винта возникла в прикладной механике при расчётах, требующих учёта большого числа сил, действующих в сложных механизмах [1,2]. Задачу о сложении сил в статике можно сформулировать так: требуется найти равнодействующую сил, действующих на твёрдое тело, чтобы момент этой равнодействующей относительно любой точки был равен сумме моментов.

В статике сила, действующая на твёрдое тело, характеризуется скользящим вектором, поскольку характеризуется не только величиной и направлением, но и линией действия.

[1] E-mail: rnr@ihep.ru

Различие между фиксированными, свободными и скользящими векторами таково: свободный вектор определён с точностью до любых параллельных переносов; скользящий вектор - с точностью до параллельных переносов вдоль своего направления; фиксированный вектор находится во взаимно однозначном соответствии с задающим его направленным отрезком. Более строго, скользящий вектор - это класс эквивалентности направленных отрезков, если эквивалентными считаются направленные отрезки, лежащие на одной прямой.

Можно определить операцию сложения скользящих векторов. Задача о сложении сил приводит к необходимости введения более общего, чем вектор, математического понятия для описания силы, действующей на твёрдое тело.

Сумма двух скользящих векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, действующих вдоль прямых (AB) и (CD), находится следующим образом: сначала складываем $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ как свободные векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MG}$, затем уменьшаем произвол в выборе начала результирующего вектора (точки M):

- Если (AB) и (CD) пересекаются в точке P, то $M = P$ (т.е. линия действия результирующего вектора проходит через P).

- Если складываемые векторы сонаправлены: $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, то M выбирается на отрезке $\big[AC\big]$ так, что

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|CD|}{|AB|} \tag{1}$$

- Если складываемые векторы противоположно направлены: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ и $|AB| > |CD|$ $\Big(|AB| < |CD|\Big)$, точка M выбирается на части луча $[CA)\Big([AC)\Big)$ вне отрезка $[AC]$ так, чтобы выполнялось соотношение (1).

- Вырожденный случай: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ и $|AB| = |CD|$; предельный переход $|AB| \to |CD|$ приводит к $M \to \infty$ и $|MG| \to 0$, причём $|\overrightarrow{MG}\times\overrightarrow{AM}| \to |\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$. Результирующая сила стремится к нулю по величине, линия её действия стремится к бесконечно удалённой прямой, причём её момент относительно любой точки плоскости стремится к моменту пары сил $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Концепция "пары сил" (т.е. чистого момента) в статике используется для описания этой ситуации [3].

- Если (AB) и (CD) скрещиваются, раскладываем каждый из складываемых векторов на компоненты следующим образом: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}$, где $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CF}$ параллельны $\overrightarrow{MG}$, $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{FD}$ перпендикулярны $\overrightarrow{MG}$; при этом $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FD} = 0$, следовательно $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{FD}$ представляют чистый момент, параллельный $\overrightarrow{MG}$. Положение точки M определяется путём сложения параллельных векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CF}$ как скользящих: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{MG}$.

3. Винты и многообразия Грассмана

Скользящий вектор $\overrightarrow{AB}$ (силу) в 3-мерном аффинном пространстве можно представить бивектором $f = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ в расширенном 4-мерном пространстве $\mathtt{T}$:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & x_A, & y_A, & z_A \\ 1, & x_B, & y_B, & z_B \end{pmatrix} ,$$

где O - начало координат в $\mathtt{T}$, а (x_A, y_A, z_A) и (x_B, y_B, z_B) - координаты A и B соответственно. Плюккеровы координаты бивектора $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

$$p_{01} = \begin{vmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{vmatrix} \qquad p_{02} = \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \qquad p_{03} = \begin{vmatrix} 1 & z_A \\ 1 & z_B \end{vmatrix}$$

$$p_{12} = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \qquad p_{13} = \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix} \qquad p_{23} = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix}$$

содержат информацию как о векторе силы $F_i = p_{0i}$, так и о её моменте относительно начала координат $M_i = \epsilon_{ijk} p_{jk}$.

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между скользящими векторами в 3-мерном пространстве и разложимыми внешними формами (бивекторами) в 4-мерном пространстве, содержащими среди множителей хотя бы один вектор с ненулевой t-компонентой.

Поскольку сумма двух бивекторов не всегда есть разложимая форма, сумма сил не всегда может быть описана скользящим вектором.

Однако, неразложимую форму вида $f_1 \wedge g_1 + f_2 \wedge g_2$ (из неразложимости следует линейная независимость f_1, g_1, f_2 и g_2) всегда можно представить в виде суммы $f_1' \wedge g_1' + f_2' \wedge g_2'$, где $f_1' = (0, \vec{f}_1')$, $g_1' = (1, \vec{g}_1')$, $f_2' = (0, \vec{f}_2')$, $g_2' = (0, \vec{g}_2')$; при этом f_1', g_1', f_2', g_2' получаются из f_1, g_1, f_2, g_2 симплектическим преобразованием. Более того, симплектическое преобразование можно подобрать таким образом, чтобы $\vec{f}_2' \times \vec{g}_2' \parallel \vec{f}_1'$. Бивекторы $f_2' \wedge g_2'$, у которых $g_2'^{(0)} = f_2'^{(0)} = 0$, отвечают паре сил (т.е. чистому моменту). Таким образом, сумма произвольных сил может быть представлена в виде комбинации силы (скользящего вектора) и чистого момента, параллельного ему (свободного вектора). Это утверждение было впервые доказано Л.Пуансо [3]. Такая комбинация получила название винта, сумма двух винтов снова является винтом; можно определить понятие угла между винтами, скалярное произведение винтов и другие операции с винтами.

Таким образом, адекватное описание воздействия нескольких сил на твёрдое тело даётся в терминах винтов, а не векторов. При этом особое значение имеет представление винтов 2-формами $p_{ij} e^i \wedge e^j$ в расширенном 4-мерном пространстве. Силы (т.е. скользящие векторы) представлены 2-формами, удовлетворяющими соотношению Плюккера

$$p_{01} p_{23} - p_{02} p_{13} + p_{03} p_{12} = 0 , \tag{2}$$

которое представляет собой условие ортогональности силы и её момента относительно начала координат.

Винт, т.е. эквивалент действия произвольного числа сил на твёрдое тело, однозначно задаётся парой $(\vec{F}, \vec{M})$, где $\vec{F}$ - сумма всех этих сил, предствленная скользящим вектором с произвольно выбранной линией действия $\parallel \vec{F}$, а $\vec{M}$ - сумма моментов всех сил относительно некоторой точки $\mathcal{O}$ на этой линии. Можно показать, что винт не зависит ни от двухпараметрического произвола в выборе линии действия $\vec{F}$, ни от выбора точки $\mathcal{O}$: M зависит от точки $\mathcal{O}$ таким образом, что совокупный эффект действия $\vec{F}$ и $\vec{M}$ на тело остаётся неизменным. При этом существует такая линия действия, что $\vec{M} = p\vec{F}$, эта линия действия называется осью винта.

Помимо винтов, описывающих воздействие системы сил на твёрдое тело (называемые силовыми или динамическими), можно рассмотреть винты, описывающие движение твёрдого тела - кинематические винты. Кинематический винт - это пара $(\vec{\Omega}, \vec{v})$, где $\vec{\Omega}$ - скользящий вектор угловой скорости, линией действия которого служит мгновенная ось вращения, а $\vec{v}$ - свободный вектор скорости.

Концепция винтов и винтовое исчисление оказались исключительно полезными в технической механике [4] и робототехнике [5] для расчёта различных механизмов. Подробное изложение теории с примерами практического применения можно найти в монографии [2].

4. Винты и твисторы

Однако, имеет смысл рассмотреть винт, в некотором смысле дуальный к кинематическому - движение твёрдого тела можно также характеризовать винтом $(\vec{p}, \vec{J})$ где $\vec{p}$ - скользящий вектор импульса, линия которого такова, что момент импульса относительно точек этой оси параллелен импульсу, а $\vec{J}$ - свободный вектор момента импульса. Этот винт мы назовём винтом количества движения. Сумма двух таких винтов отвечает винту количества движения составной системы, разность - относительному движению. В предельном случае, когда твёрдое тело становится материальной точкой, но его момент импульса сохраняет ненулевое значение, можно говорить о материальной точке со спином. Операции с винтами количества движения соответствуют описанию динамики системы, состоящей из материальных точек со спином (элементарных частиц в классическом нерелятивистском приближении). Однако, винт количества движения замечателен тем, что он естественным образом обобщается на релятивистский случай: 3-вектор $\vec{p}$ заменяется на 4-вектор p_μ, а обычный момент $\vec{J}$ заменяется на форму, соответствующую генераторам группы Лоренца $J_{\mu\nu}$ (форму релятивистского углового момента). Как и в случае силового винта, изменение линии действия вектора импульса приводит к изменению углового момента согласно формуле

$$J_{\mu\nu} \to J_{\mu\nu} + x_\mu p_\nu - p_\mu x_\nu \ , \tag{3}$$

Среди множества релятивистских винтов количества движения особо выделено 7-мерное подмножество винтов, импульсы которых лежат на световом конусе. В этом случае тензорные величины $J_{\mu\nu}$ и p_μ могут быть выражены в терминах двух вейлевских 2-спиноров ω_A и $\pi_{\dot{A}}$

$$\begin{aligned} p_\mu \sigma^\mu_{A\dot{A}} &= \bar{\pi}_A \pi_{\dot{A}} \\ J_{\mu\nu}\sigma^\mu_{A\dot{A}}\sigma^\nu_{B\dot{B}} &= \imath(\omega^A\pi^B + \omega^B\pi^A)\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} - \imath\epsilon^{AB}(\omega^{\dot{A}}\pi^{\dot{B}} + \omega^{\dot{B}}\pi^{\dot{A}}) \ . \end{aligned} \tag{4}$$

При этом равенство (3) влечёт за собой зависимость спинора ω от x:

$$\omega^A = \mathring{\omega}^A + x^{A\dot{A}}\ , \pi_{\dot{A}} \tag{5}$$

где

$$x^{A\dot{A}} = \sigma_\mu^{A\dot{A}} x^\mu \ = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \imath x^2 \\ x^1 + \imath x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} .$$

Пара спиноров $(\omega_A, \pi_{\dot{A}})$, удовлетворяющая соотношению (5), получила название твистора [6, 7].

Другой подход, приводящий к концепции твисторов, возникает из описания множества световых лучей в четырёхмерном пространстве-времени [8]. Использование координат Плюккера $\Big(v_\mu, M_{\mu\nu} = v_\mu l_\nu - l_\mu v_\nu\Big)$, для описания светового луча общего положения, где 4-вектор v направлен вдоль светового луча, а светоподобный вектор l соединяет начало координат с рассматриваемым световым лучом, вполне аналогично обсуждавшемуся выше рассмотрению динамических винтов и винтов количества движения. Светоподобные векторы v и l можно выразить в терминах 2-спиноров,

$$v_\mu \sigma^\mu_{A\dot{A}} = \bar{v}_A v_{\dot{A}} \qquad l_\mu \sigma^\mu_{A\dot{A}} = \bar{\lambda}_A \lambda_{\dot{A}} \tag{6}$$

5-мерное многообразие световых лучей естественным образом вкладывается в вещественно 8-мерное пространство твисторов $Z_\alpha = (\lambda^{\dot{A}}, v_A)$, где $\lambda^{\dot{A}} = \dfrac{\bar{v}_A l^{A\dot{A}}}{\bar{v}_A \bar{\lambda}^A}$.

К концепции твистора можно подойти и с другой стороны, начиная не с построения твисторных аналогов каких-либо объектов в пространстве Минковского, а с представления точек пространства Минковского плоскостями в $\mathbf{C}^4$. Именно, поставим каждой точке x матрицу (x^μ считаются комплексными)

$$X = \Big(I, \sigma_\mu^{A\dot{A}} x^\mu\Big) \ = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \imath x^2 & 1 & 0 \\ x^1 + \imath x^2 & x^0 - x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

и рассмотрим плоскость в $\mathbf{C}^4$, натянутую на строки этой матрицы. Так возникает реализация пространства Минковского как большой клетки Шуберта грассманова многообразия $Gr_2(\mathbf{C}^4)$, этот подход подробно изучен в монографии [9].

5. Заключение

Концепция грассманова многообразия возникает вполне естественно при решении задачи о сложении сил, действующих на твёрдое тело. Произвольная система таких сил может быть представлена в виде винта: суперпозиции силы и пары сил. Пространство винтов изоморфно пространству внешних форм в $\mathbf{R}^4$, гиперплоскость $x^0 = 0$ в котором является 3-мерным пространством сил. Разложимые формы соответствуют "первичным" величинам: силам либо чистым моментам (парам сил). Таким образом, множество сил и пар сил представляет собой грассманов конус, проективизация которого представляет собой грассманово многообразие $Gr_2(\mathbf{R}^4)$. Такой подход позволяет рассматривать силы и пары сил как величины одной природы.

В дальнейшем внимание к теории грассмановых многообразий привело к наблюдению, что многообразие $Gr_2(\mathbf{C}^4)$ можно отождествить с комплексифицированным компактифицированным пространством Минковского, что позволяет выражать математические объекты в пространстве Минковского через таковые в исходном пространстве твисторов $\mathbf{C}^4$.

С другой стороны, твисторное пространство возникает естественным образом, если момент и 4-импульс релятивистской системы, рассматриваемые как винт, выразить через вейлевские спиноры: пара спиноров, образующие твистор, имеют такую же зависимость от координат, как и пара векторов, образующих винт.

Таким образом, концепции винтов и грассмановых многообразий, сформировавшиеся в эпоху бурного развития прикладной механики, сыграли существенную роль в развитии теории твисторов.

Список литературы

1. *R.S.Ball* A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge University Press, 1900

2. *Ф.М.Диментберг* Винтовое исчисление и его приложения к механике. М.:Наука, 1965.

3. *Л. Пуансо* Начала статики, Пг.:Науч.-техн.изд-во:1920; *Poinsot L.*, Elèments de statique, Paris:1804.

4. *А.П. Котельников* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань, 1895.

5. *R.M.Murray, Z.Li, S.Shankar Sastry* A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. CRC Press, 1994.

6. *R.Penrose, R.S.Ward* Twistors for flat and curved space-time In: General Relativity and Gravitation (A.Held Ed.), V.2. P. 283–328. New York and London: Plenum Press, 1980.

7. *Р.Пенроуз, В.Риндлдер* Спиноры и пространство-время. Том 2. М.:Мир, 1988.

8. *R.Penrose* Twistor algebra // J.Math.Phys. V.8 1967. P.345.

9. *Ю.И.Манин* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.:Наука, 1984.